

Topologische Untersuchung
der
Kurven-Verschlingung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

vorgelegt der

hohen philosophischen Facultät

der

Universität Zürich

von

HEINRICH WEITH
aus Homburg vor der Höhe.

ZÜRICH

Druck von Orell Füssli & Co.

1876

Topologische Untersuchung
der
Kurven-Verschlingung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

vorgelegt der

hohen philosophischen Facultät

der

Universität Zürich

von

HEINRICH WEITH

aus Homburg vor der Höhe.

ZÜRICH

Druck von Orell Füssli & Co.

1876

Einleitung.

Die Untersuchung unserer räumlichen Vorstellungen, ganz abgesehen von Maass und Grössenverhältnissen, nur in Bezug auf gegenseitige Lage, Aufeinanderfolge, ist Gegenstand eines besondern Zweiges der Mathematik. Leibnitz, welcher eine Rechnung mit Raumgrössen, diese nur in der erwähnten modalen Hinsicht aufgefasst, zu besitzen glaubte, nannte diese Wissenschaft *geometria situs*; Riemann, welcher zur Verwendung bei seinen grossartigen analytischen Untersuchungen hierhergehörige Sätze entwickelt, überschreibt seine zweite Abhandlung im 54. Band des Crelle'schen Journals: „Sätze aus der *analysis situs* für die Theorie etc.“ Auch in neuerer Zeit sind¹⁾ diesen Gebieten entnommene Sätze als zur *geometria situs* gehörig bezeichnet worden. In der Einleitung zu seinen Vorstudien zur Topologie, welchem Werke ich die Anregung zur vorliegenden Arbeit verdanke, entwickelt Listing²⁾ die Gründe, welche ihn veranlassen abzugehen von dieser ältern Bezeichnung und dafür den Namen Topologie für Untersuchungen in der betreffenden Richtung zu wählen. Namentlich in Rücksicht darauf, dass in neuerer Zeit die Bezeichnung Geometrie der Lage in ganz anderer Bedeutung verwendet wird, habe ich den Anschluss an die Listing'sche Nomenclatur zweckmässig gehalten.

¹⁾ Wiener, über eine Aufgabe aus der *Geometria Situs*. *Mathem. Annalen* Bd. VI, S. 29.

²⁾ Göttinger, Studien. I. Abtheil. 1847. X. Vorstudien zur Topologie.

Die Untersuchungen auf dem weiten Gebiete der Topologie theilen das Schicksal anderer mathematischen Betrachtungen. Die eine Seite dem practischen Leben zugewendet, zeigt eine ungemeine Fülle und Häufigkeit der Anwendung, die andere Seite treibt hin zu Abstractionen, unerreichbar unserer anschaulichen Vorstellung.

So umfangreich die hier anzustellenden Untersuchungen topologischer Natur sein könnten, so wenig ist doch in dieser Beziehung bekannt geworden. Listing will in seiner erwähnten, so anregenden Abhandlung nicht mehr geben als Vorstudien. In dieser Abhandlung wird von topologischen Verhältnissen an Punkten und Curven gehandelt; eine zweite behandelt ein ganz anderes Problem¹⁾. Indem ich mich nun auf diesem wenig betretenen Gebiete versuche, muss ich zum Voraus um Nachsicht bitten, wenn Vorsicht mich vielleicht zu grosser Ausführlichkeit verleitet. War es doch, wenn ich nicht selbst irre, ein Uebersehen von Listing, welches mich veranlasste, gerade dieses specielle Problem, das Problem der Verschlingung einer Kurve im Raume, zu untersuchen.

Dass Verschlingungen ein Mehr oder Weniger zulassen, also mathematischer Behandlung fähig sind, das weiss Jedermann. Einen einfachen Knoten löst spielend ein Kind, den gordischen Knoten zerhaut ein Alexander. Bei dem Bestreben, diese Verhältnisse mathematisch zu erfassen, wird man ausgehen von den einfachsten Fällen. Ohne weiteres ist hier klar, dass an Stelle der ringartigen cylindrischen Körper, welche in der Wirklichkeit die Verschlingung bilden, bei der Untersuchung

¹⁾ Abhandlungen d. kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen X. Bd. 1861 u. 1862. Abhandlung der mathematischen Classe. Der Census räumlicher Complexe.

der Verschlingung die mathematische Abstraction der Kurve treten darf; allerdings mit der ganz bestimmten Einschränkung, dass die Kurventheile gegenseitig undurchdringlich sein müssen. Diese Eigenschaft findet ihren Ausdruck in dem alsbald zu erwähnenden Princip der stetigen Umformung. Die Länge der Kurve ist offenbar auf den Charakter der Verschlingung ohne allen Einfluss, wie es topologischen Beziehungen entspricht. Eines ist jedoch hiebei wohl zu beachten. Der topologische Charakter einer Verschlingung wird allerdings nicht geändert durch Verlängerung sowohl der ganzen Kurve, als auch nur einzelner Theile derselben, allein durch solche Verlängerungen darf nicht die ganze Verschlingung aufgehoben werden. Es ist daher erforderlich, die Kurve, auf welcher die Verschlingung sich befindet, unbegrenzt vorzustellen und diess geschieht entweder dadurch, dass man dieselbe nach zwei Richtungen hin unendlich lang annimmt, oder dass man die Kurve geschlossen voraussetzt.

Eine Verschlingung sehr einfacher Art ist die, welche hergestellt werden kann durch zwei Kreise und es sei gestattet, hieran einige Bemerkungen zu knüpfen.

Zwei Kreise wird man verschlungen nennen, wenn der eine einmal hindurchgeht durch das von dem andern begrenzte ebene Flächenstück. Wird alsdann der eine Kreis festgehalten so ist die Bewegung des andern — beide als materiell gedacht — beschränkt; ohne ein Zerreißen des einen oder andern wird die erwähnte gegenseitige Flächendurchbohrung nicht aufgehoben werden können.

Der erste, festgehaltene Kreis werde jetzt umgeformt. Ein Theil seiner Peripherie werde benutzt zur Bildung eines neuen, kleineren Kreises, jedoch durch blosse Verschiebung, nicht Zerreißen oder Zusammenheften, dieser kleinere Kreis werde nach einer vorherigen halben Drehung in den grösseren umgeklappt,

so dass eine Kurve entsteht wie Fig. 1 darstellt, wobei im Punkte D die beiden Kreise ¹⁾ in einander übergehen, D also kein wirklicher Schnittpunkt ist. In D wird demnach der eine Kurvenast, etwa der stärker bezeichnete, dem Auge des Beschauers näher sein als der andere. Die Verschlingung, welche alsdann mittelst eines andern Kreises hergestellt werden kann, wird offenbar stärker wie die erst erwähnte genannt werden können, insofern als beim einmaligen Durchsetzen der beiden übereinander liegenden Flächen (bei C) der Bewegung dieses andern Kreises, unter denselben Voraussetzungen wie oben, nach einiger Zeit 2 Kurven Widerstand leisten, mag er sich bewegt haben, in welcher Richtung er will. Würde jedoch der zweite Kreis die grössere Fläche (in Fig. 1 nicht weiter bezeichnet) durchsetzen, dann ist die Verschlingung derselben Art wie oben; während im vorhergehenden Falle es nicht mehr möglich ist, nach der Durchsetzung mittelst des zweiten Kreises bei C den ersten Kreis wiederherzustellen als solchen durch stetige Umformung, hindert in diesem zweiten Falle der zweite Kreis durchaus nicht die Ausführung derjenigen Operationen, welche den ersten Kreis wieder erzeugen. Diese eben erwähnte Verschiedenheit erklärt sehr einfach den später öfter zu brauchenden Ausdruck der Reductibilität. Eine Verschlingung kann nur scheinbar sehr verwickelt sein, sie kann durch erlaubte Veränderungen auf eine einfache Form gebracht werden, sie ist reductibel; oder aber es gelingt nicht, ihr eine noch einfachere Gestalt zu geben, als sie schon besitzt, dann ist sie reduirt.

Im Folgenden soll nun die Verschlingung einer einzigen geschlossenen Kurve untersucht werden. Und zwar soll diese Kurve

¹⁾ Fig. 1 stellt unter den gemachten Voraussetzungen allerdings nicht mehr 2 Kreise, vielmehr eine doppelt gekrümmte Kurve dar; doch sei der Kürze wegen die Bezeichnung Kreis für ringartiges Kurvenstück etc. erlaubt; Missdeutungen werden wohl nicht entstehen.

sehr einfacher Natur sein; sie soll so beschaffen sein, dass ein Schnitt an einem beliebigen ihrer Punkte genügt, um sie durch stetige Umformung, ohne Zerreißen, in eine Gerade verwandeln zu können. Von jedem ihrer Punkte aus kann die Kurve in zwei Richtungen durchlaufen werden. Hat man irgend einen Punkt als Anfangspunkt festgesetzt, so gelangt man nach einem Umlauf in diesen Punkt zurück und hat alsdann alle Punkte der Kurve und jeden nur einmal durchlaufen. Ausserdem wird man stets im Stande sein, die Kurve so anzuordnen, dass ihre orthogonale Projection auf irgend eine Ebene keine Wendepunkte enthält; bei ihrem Umfahren also Drehung immer nur in einem Sinne erfordert.

Dies letztere Verhalten ist späterhin von so grosser Bedeutung, dass hier eine weitere Erläuterung trotz der Einfachheit Platz finden mag. Nach einem Schnitt in irgend einem Punkte kann die verschlungene Kurve in eine Gerade verwandelt werden. Diess erfordert eine gewisse Anzahl Operationen des Auseinanderziehens, Drehens, etc. Alle diese Operationen kann man im umgekehrten Sinne rückwärts ausgeführt denken an einer Geraden und wird dann, wenn man schliesslich die beiden Endpunkte zusammenheftet, die gegebene Verschlingung wieder erhalten.

Beim Beginn dieser Operationen denke man zunächst die Kurve um einen Stab gelegt. Würde alsdann eine Wendung der Kurve verlangt, welche dem obigen Verhalten nicht gemäss wäre, so denke man sich den betreffenden Theil der Kurve hinreichend verlängert und dann passend umgeklappt auf den Stab gebracht und diese Operation immer wiederholt, sobald eine Abweichung von dem ursprünglichen Umlaufsinn um den Stab erfolgt.

Denkt man sich die Projection der Verschlingung auf eine Ebene gegeben, so ergibt sich die Möglichkeit der Ausscheidung

der Wendepunkte sofort. Denn die Projection darf stetiger Umformung unterworfen werden, es dürfen Kurventheile verschoben, umgeklappt werden, die Projection stellt dann immer noch dieselbe Verschlingung dar.

Die Verschlingung zweier Kreise konnte nach dem Obigen allgemein charakterisirt werden durch das Verhalten der Kreise gegen solche Flächen, welche durch sie hindurchgelegt sind. Sucht man diess zu übertragen auf eine verschlungene Kurve, so wird es sich zunächst um genauere Bezeichnung der Beschaffenheit der durch die Kurve gelegten Fläche handeln.

Durch die verschlungene Kurve können Flächen der verschiedensten Art gelegt werden. So eine geschlossene, dreifach zusammenhängende Fläche, auf welcher die Kurve dann liegen würde und indem man die Kurve passend verschiebt, beziehungsweise die Fläche der Art anordnet, dass keine Durchdringungen derselben mit sich selbst stattfinden, erkennt man, dass sofort die Verschlingungsverhältnisse direct sich übertragen auf diese ringartigen Flächen.

Ferner kann man durch die Kurve Flächenstücke legen der Art, dass die verschlungene Kurve die ganze Begrenzung derselben bildet. In gewissen einfachen Fällen von Verschlingungen kann man die Flächen derart wählen, dass die Kurve dieselbe nicht durchsetzt. Man erhält alsdann Flächen, deren beide Seiten in einander übergehen. Derartige Flächen erwähnt Klein¹⁾ und gibt an, dass man eine solche erhält, wenn man einen Papierstreifen an einem Ende festhält vom andern Ende her $\frac{1}{2}$ Drehung gibt und dann die Enden aufeinanderheftet. Hätte man dem Papierstreifen vorher statt $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ Drehungen gegeben, so würde alsdann sein Rand die einfachste Verschlingung einer Kurve (Fig. 2) darstellen, wie auch aus einer Bemerkung von Listing (S. 864) sich ableiten lässt.

¹⁾ Mathem. Annalen, Bd. VII., S. 549.

Indem man endlich versucht, solche Flächen durch die Kurve zu legen, welche der Ebene beim Kreise entsprechen, welche also nach der Riemann'schen Bezeichnungsweise einfach zusammenhängend wären, erkennt man bald, dass bei einer verschlungenen Kurve die Kurve diese Fläche, deren Rand sie bildet, jederzeit durchsetzt. Mag man die Kurve oder die Fläche noch so mannigfaltig umformen, so lange diese Umformung nur eine stetige bleibt, sowohl in Bezug auf Fläche wie auf Kurve, so lange bleibt eine Anzahl Durchbohrungen der Fläche durch die Kurve bestehen. Jedoch kann durch geeignete Wahl der Fläche und Anordnung der Kurve diese Zahl auf ein Minimum gebracht werden und diese Zahl wird alsdann für die Verschlingung charakteristisch sein. Vollständig characterisirt ist hierdurch die Verschlingung zwar noch nicht, aber immerhin eines der wesentlichen Unterscheidungsmerkmale der einzelnen Verschlingungen ist gegeben; verschiedene andere Angaben werden sich im Verlauf der Untersuchung ergeben.

Diese Durchbohrungen der Fläche durch ihren Rand übertragen sich auf die Fläche selbst in Form von Uebergangslinien. Durch diese Uebergangslinien soll jedoch der Zusammenhang der ursprünglichen Fläche durchaus nicht geändert werden; es sollen dieselben vielmehr eine ähnliche Rolle spielen wie die Uebergangslinien einer Riemann'schen Windungsfläche. Jedoch soll eine Transformation der Fläche immer nur soweit gestattet sein, als dadurch die gegebene Kurve nur stetig umgeformt wird. In Folge dessen wird bei einer verschlungenen Kurve neben einer gewissen Anzahl Durchbohrungen die durchgelegte Fläche auch Uebergangslinien zeigen und in gewissen Fällen wird die Zahl dieser Uebergangslinien direct die oben erwähnte charakteristische Zahl sein.

Ein Beispiel von Durchbohrung der Fläche durch den Rand und einer Uebergangslinie erhält man sehr einfach, wenn man

Fig. 1., unter den oben gemachten Voraussetzungen über die Bedeutung von D , von einem beliebigen Punkt des Raumes durch einen Kegel projicirt. Der Kegel bildet die einfach zusammenhängende Fläche, die Kurve seinen Rand, welcher auf der durch D gehenden Kante (Uebergangslinie) den Kegel durchsetzt. Durch Transformation der Kurve kann aber der Durchstosspunkt in diesem Falle entfernt werden, wie auch andere, einfach zusammenhängende Flächen angegeben werden können, die von der Kurve in ihrer jetzigen Form begrenzt, aber nicht durchbohrt werden.

So allgemein die bis jetzt angestellten Betrachtungen auch gewesen sein mögen, so lässt doch jetzt schon ein Theil der topologischen Untersuchung einer verschlungenen Kurve sich näher characterisiren. Dieser Theil wird darin bestehen, die gegebenen Verschlingungen zu gruppiren und zwar kann diese Gruppierung auf zweierlei Weise geschehen, je nachdem man als Gattungsmerkmal sich bedient der Anzahl der Durchbohrungen der Flächen durch die Randkurven oder je nachdem man die Art der einfachsten, durch die Kurve gelegten Fläche als trennendes Merkmal annimmt.

Die Gruppen, welche man auf einem oder andern Wege erhält, werden verschieden erwartet werden können und es kann das andere der beiden Merkmale alsdann zur Bildung von Unterabtheilungen verwendet werden und schliesslich die einzelne Verschlingung bestimmt characterisirt werden. Von einander verschieden würden diejenigen Verschlingungen genannt werden, welche nicht ineinander durch stetige Umformung transformirt werden können.

Wenn nun so ein Symbol den topologischen Charakter einer Verschlingung darstellt, dann schliessen sich die verschiedenen Symbolen angehörenden Verschlingungen gegen einander ab. Eine Verschlingung reagirt gegen eine andere nur insofern als

sie in diese transformirt werden kann oder nicht. Aber um Beziehungen zwischen verschiedenen Verschlingungen zu erhalten, bedarf es neuer Hilfsmittel.

Diese Hilfsmittel sind vollkommen willkürlich; gesetzmässig ist erst ihre Anwendung. Aber wie in der analytischen Geometrie die Kurve construirt wird aus geradlinigen Coordinaten, so darf es auch hier erlaubt sein, die Verschlingung aufzubauen aus Elementen, die ihr von Hause aus fremd sind.

Die Operationen mit jenen willkürlichen Hilfsmitteln werden anderer Art sein, wie die mit den verschlungenen Kurven. Die verschlungene Kurve ändert ihren Charakter nicht, wenn sie unterzogen wird der Operation der stetigen Umformung. Unter stetiger Umformung werden verstanden alle Verschiebungen einzelner Theile, Dehnungen, Zusammenziehungen, Drehungen u. s. f., so lange kein Zerreißen oder Zusammenheften der Kurve dabei stattfindet. Analoges gilt für Flächen. Diess Princip der stetigen Umformung gibt Anlass zu dem Satz, dass ein jedes Kurvenstück ersetzt werden kann durch ein anderes, sobald als durch beide Stücke eine einfach zusammenhängende Fläche gelegt werden kann, welche von der Kurve nicht durchsetzt wird.

In dem Wesen der Topologie liegt es begründet, dass das Vorgehen in ihr wesentlich intuitiv sein muss. In der That ist nirgends so sehr die anschauliche Vorstellung beweisend, erläuternd. Häufiger wie irgendwo tönt hier der Ruf des Brahmanen: Siehe!

In seinen Vorstudien hat Listing dem Studium der Verschlingung die Projection derselben auf eine Ebene zu Grunde gelegt; dabei die sich ergebenden Durchschnittspunkte derart markirt, dass kein Zweifel über die Art der Ueberkreuzung auftreten kann. In der That genügt eine solche Projection vollständig zur topologischen Darstellung einer Verschlingung. Denn

wie hoch ein Punkt über einem andern liegt, ist topologisch ganz gleichgültig; es genügt zu wissen, welcher Punkt über dem andern liegt. Beziehungen zwischen verschiedenen Verschlingungen hat Listing nicht angegeben (auf einander reducierbare Verschlingungen nicht als verschieden angenommen), vielmehr geht er darauf aus, ein Symbol für eine Verschlingung und Verschlingungen zu einem Symbol zu entwickeln. Sein Verfahren soll in Folgendem zunächst erläutert werden.

I.

Eine Kurve der oben erwähnten einfachen Art sei beliebig verschlungen gegeben und zwar befinde sich dieselbe, der einfacheren Ausdrucksweise wegen, senkrecht über einer horizontalen Ebene, auf welche sie orthogonal projectirt wird. Das Bild der Kurve auf der Ebene wird alsdann eine vollständig geschlossene Kurve sein, jedoch behaftet mit irgend welchen Durchschnittspunkten, herrührend von solchen Punkten der ursprünglichen Kurve, welche senkrecht über einander lagen; und zwar kann ohne Störung der Allgemeinheit angenommen werden, dass ein solcher Durchschnittspunkt immer nur zwei über einander liegenden Punkten entspreche. Ein solcher Durchschnittspunkt in der Projection führt nach Listing den Namen Knotenpunkt; er entspricht nicht einem wirklichen Schnittpunkt der gegebenen Kurve; vielmehr ist, um von dem einen Punkt der Kurve, welchen er darstellt, zu dem andern, den er ebenfalls abbildet, zu gelangen, ein Umlauf um einen gewissen Theil der Kurve erforderlich, falls man sich im Raume von einem Kurvenpunkt zu einem benachbarten Kurvenpunkt bewegt. Als Beispiel erwähnt Listing das zweier über einander hergehender Wege und citirt bei dieser Gelegenheit das Wahrzeichen meiner Vaterstadt Homburg vor der Höhe, welches besteht in einem „Wege, auf welchem ein Wagen über den andern fahren kann“. In der That ist das Citat sehr zutreffend; beide Fahrwege vereinigen sich wieder, nachdem sie sich überkreuzt haben, so dass man mit einem Wagen nach Umfahren eines gewissen Weges aus einer Bahn in die andere gelangen kann. In ganz

anderer Bedeutung ist die Bezeichnung Knotenpunkt angewendet in einer Abhandlung von Hierholzer¹⁾: Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. Man findet hier die Definition: „Ein Punkt mit mehreren Zweigen heisse ein Knotenpunkt“, und „Zweige eines Punktes mögen diejenigen verschiedenen Theile eines Zuges heissen, auf welchen man den fraglichen Punkt verlassen kann“. Solche Punkte nennt Listing Vereinigungspunkte oder Durchkreuzungen.

In einem Knotenpunkte überkreuzen sich gewissermassen zwei Aeste der Kurve. Sobald angegeben ist, welcher Ast jeweils der obere ist, enthält die Projection den ganzen topologischen Charakter der Verschlingung. Im Allgemeinen wird es möglich sein, durch Operationen, welche mit den Principien der stetigen Umformung in Einklang stehen, die Anzahl der in einer gegebenen Projection vorhandenen Knotenpunkte zu verringern; ist diess nicht weiter der Fall, so kann man die Projection reducirte Form nennen (Listing pag. 863). Für solche reducirte Formen entwickelt Listing gewisse Symbole. Nach Listing kommen in einem jeden Knotenpunkte in der Projection den beiden Scheitelwinkeln ein gleiches, den Nebenwinkeln verschiedenes Zeichen zu. Denkt man sich in einem Winkel stehend und gegen den Knotenpunkt schauend, so kommt dem Winkel das Zeichen λ zu, wenn der obere Ast des Knotenpunkts von links her gegen den Knotenpunkt hinläuft und es kommt ihm zu das Zeichen δ , wenn der obere Ast von rechts her gegen den Knotenpunkt zu läuft (Listing pag. 861). Denkt man sich in die Projection einer Verschlingung alle die betreffenden δ und λ eingeschrieben, so nennt Listing eine Form monotyp, wenn in einer jeden Parzelle nur Zeichen gleicher Art sich finden. Einer jeden Parzelle kommt alsdann ein Zeichen δ oder λ zu noch mit einem Exponenten versehen, welcher die

¹⁾ Mathem. Annalen, Bd. VI, S. 30.

Anzahl der δ oder λ in der Parzelle (die Ecken) angibt. Indem man alsdann noch Glieder mit gleichem Exponenten zusammenfasst, erhält man das Listing'sche Symbol.

Ohne genaue Definitionen zu geben, scheint Listing von der Ansicht auszugehen, dass reducirte Formen durchaus entweder monotyp sein müssten, oder dass sie sich doch monotyp darstellen lassen müssten. Diess ist jedoch nicht der Fall. Es gilt nicht der Satz, dass in reducirten Formen die Exponenten 1 nicht vorkommen könnten (vgl. S. 863). Ehe jedoch diess gezeigt werden soll, sei es gestattet, einige Bemerkungen über Knotenpunkte im Allgemeinen zu machen.

Denkt man sich einen Punkt die gegebene Kurve im Raume von einem beliebigen Anfange an durchlaufend, so wird sein entsprechender Punkt in der Projection ebenfalls eine vollständige Umfahrung ausgeführt haben und also jeden Knotenpunkt zweimal passirt haben. Ein Knotenpunkt wird im Verlaufe einer vollständigen Umfahrung einmal überschritten, insofern er den oberen der beiden senkrecht übereinanderliegenden Punkte und einmal insofern er den unteren darstellt, oder kurz, es erscheint ein jeder Knotenpunkt einmal als oberer und einmal als unterer Knotenpunkt, oder auch als — oder + Knotenpunkt (der obere Ast im Knotenpunkt durch ein stärkeres Zeichen hervorgehoben). Von einem Knotenpunkt gehen in der Projection 4 Wege aus. Auf zwei Wegen kann stets von einem Knotenpunkte zu irgend einem andern Knotenpunkte gelangt werden. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass man von einem Knotenpunkte aus auf 4 Wegen zu einem gewissen andern gelangen kann.

Kann von einem Knotenpunkte A zu einem Knotenpunkte C nur auf 2 Wegen gelangt werden, so kann um A ein vollständiger Umlauf ausgeführt werden, ohne C zu berühren, d. h. es kann von A ausgehend nach Umfahrung eines gewissen Theiles der Projection, (die Umfahrung der der Kurve im Raum entsprechend),

auf welcher C nicht liegt, zu A zurückgekehrt werden. Kann ein Umlauf um A ausgeführt werden, ohne C zu berühren, so kann ein Umlauf um C ausgeführt werden, ohne A zu berühren. Denn denkt man sich jenen Umlauf um A ausgeführt, dann bleiben in A noch zwei Wege unbenutzt, auf dem einen gelangt man in Fortsetzung der Umfahrung nach C hin, auf dem andern von C zurück nach A und alsdann muss die ganze Kurve vollständig umfahren sein, es muss also C zweimal überschritten, d. h. ein Umlauf um C ausgeführt worden sein, ohne A zu berühren. Zwei Knotenpunkte können benachbart genannt werden, wenn es möglich ist, von dem einen zu dem andern zu gelangen, ohne einen andern Knotenpunkt zu berühren. Ein Knotenpunkt kann sich selber benachbart sein; zwei Knotenpunkte können in Bezug auf einen oder zwei Aeste benachbart sein. Zwei benachbarte Knotenpunkte können abwechselnd genannt werden wenn der Ast, in Bezug auf welchen sie benachbart sind, bei dem einen Knotenpunkt den oberen, bei dem andern den unteren Ast bildet. Sind alle Knotenpunkte einer Form abwechselnd, so ist die Form *monotyp*.

Hat man von einem Knotenpunkte aus einen vollständigen Umlauf ausgeführt, so ist die Anzahl der während des Umlaufs berührten andern Knotenpunkte gerade. Hierbei sind die sich selbst benachbarten Knotenpunkte doppelt gezählt. Aus dieser Bemerkung folgt sofort der Satz: Wenn man in einer Ebene einen beliebig verschlungenen, in sich zurückkehrenden Zug ohne Wiederholung und Unterbrechung beschreibt, so kann man die Durchschnittspunkte des Zuges jederzeit so als Knotenpunkte bezeichnen, dass die entstehende Form *monotypen Characters* ist.

Die Möglichkeit der Reduction der Knotenpunkte kann herühren von zwei Ursachen. Die Reduction kann in einigen Fällen *direct* ausgeführt werden, ohne dass man die Natur der

Knotenpunkte kennt, sie kann anderseits beruhen auf der Art der Aufeinanderfolge von oberen und unteren Knotenpunkten. Die Reductionen der ersten Art werden gegeben durch zwei Sätze, welche keines weiteren Beweises bedürfen. Ein jeder Knotenpunkt, welcher den einzigen Knotenpunkt einer Oese bildet, kann ohne Aenderung des topologischen Charakters der Verschlingung durch einen gewöhnlichen Punkt mit Weglassen der Oese ersetzt werden (Listing S. 863). (Diess wären nach der obigen Bezeichnung die sich selbst benachbarten Knotenpunkte.) Kann ein Knotenpunkt durch eine Linie in der Ebene der Projection so durchschnitten werden, dass diese Linie das von der Kurve begrenzte Flächenstück nicht trifft, so kann dieser Knotenpunkt jederzeit durch Umlappen des auf der einen oder andern Seite der schneidenden Linie gelegenen Theiles der Kurvenprojection entfernt werden. Sind alle hierdurch erkennbaren Reductionen ausgeführt, so sind weitere Reductionen nur dann möglich, wenn die Art der Aufeinanderfolge der Knotenpunkte bekannt ist, wenn also in den einzelnen Knotenpunkten der obere von dem unteren Ast auf irgend welche Weise unterschieden ist.

Zwei Knotenpunkte können benachbart sein in Bezug auf die beiden Aeste, durch welche sie gebildet werden. Ist diess der Fall und sind sie ausserdem der Art beschaffen, dass der obere Ast des einen übergeht zunächst in den oberen Ast des andern — so können beide Knotenpunkte sofort ausgeschieden werden.

Drei Knotenpunkte können derartig benachbart sein, dass sie ein (gerad- oder krummliniges) Dreieck bilden. Sind zwei dieser Knotenpunkte in Bezug auf einen Ast gleichartig (ist dieser Ast für beide oberer oder unterer Ast), so müssen der dritte Eckpunkt des Dreiecks und einer der beiden ersten es auch in Bezug auf den andern Ast sein.

Aus diesen und ähnlichen Sätzen können allgemeine Regeln für Reduction der Knotenpunkte abgeleitet werden. Mit Hülfe des ersten Satzes lässt sich auch leicht ableiten, dass eine Verschlingung in der Projection mindestens 3 Knotenpunkte besitzen muss und zwar der Art, dass bei 3 Knotenpunkten die Projection monotypen Charakters ist. Diese Verhältnisse sollen jedoch nicht weiter verfolgt werden. Vielmehr soll zunächst gezeigt werden, dass der monotype Charakter nicht massgebend für die reducirte Form im Allgemeinen ist. Hievon soll der Nachweis geführt werden durch Aufzeigen einer reducirten Form nicht monotypen Charakters. Die betreffende Verschlingung werde gebildet durch passende Vereinigung zweier Verschlingungen der einfachsten Art, d. h. Verschlingungen, deren Projectionen je drei Knotenpunkte besitzen. Die eine Verschlingung wird dargestellt durch Fig. 2. Die andere Verschlingung wird aus dieser erhalten, indem man jeden Knotenpunkt entgegengesetzt bezeichnet. Diese beiden Verschlingungen sind reducirt, nicht ineinander transformirbar, in dem Verhältniss der Perversion stehend (Listing S. 827, 863 vgl. auch Anmerkung am Schlusse d. Abschnittes). Die dreieckigen Parcellen beider Verschlingungen denke man sich jetzt gegenseitig verschlungen (wie die beiden in der Einleitung erwähnten Kreise); ferner bei beiden Verschlingungen in je einer zweieckigen Parcellen einen Querschnitt durch die Kurve ausgeführt und die 4 Enden so verbunden, dass eine geschlossene Kurve entsteht. Die so erhaltene Verschlingung ist die erwähnte.

Wie man aus der Entstehungsweise sofort übersieht, enthält die reducirte Form in der Projection 8 Knotenpunkte, wovon, wie gleichfalls schon aus der Entstehungsweise sich ergibt, stets mindestens 2 Paar aufeinanderfolgende in Bezug auf den betreffenden Ast gleich sein müssen, die reducirte Form also nie monotyp sein kann. Der reducirten Form kann die Gestalt

von Fig. 5 gegeben werden. An derselben erkennt man sehr leicht, dass diese Form reducirt ist. Denn die Symmetrie dieser Figur ergibt, dass die Möglichkeit der Reduction sich auf die Möglichkeit der Entfernung des Knotenpunktes A oder B allein oder zusammen beschränkt. Wenn auch zugegeben werden muss, dass aus der Reduction von A die nochmalige Reduction des symmetrisch gelegenen A' durchaus nicht folgt, so ist doch jedenfalls soviel sicher, dass wenn A überhaupt nicht reductibel, es auch nicht A' ist. Dass aber weder A noch B , noch beide zusammen entfernt werden können, ergibt ein Blick auf Fig. 5 verbunden mit der Vorstellung derjenigen Operationen, welche einer stetigen Umformung entsprechen.

Die Symbolik, soweit sie Listing gegeben hat, umfasst demnach nur eine ganz bestimmte Gruppe von Verschlingungen. Denkt man sich die Projection einer Kurve stetig durchlaufen, so können zwei benachbarte Knotenpunkte abwechselnd genannt

werden, insofern der ^{obere} Ast des einen zunächst übergeht
untere

in den ^{unteren} Ast des andern. Sind alle diejenigen Knoten-
oberen

punkte ausgeschieden, welche sich selbst benachbart sind, so geht die Listing'sche Symbolik auf alle übrigbleibenden Formen mit abwechselnden Knotenpunkten. Sie umfasst also, wie gezeigt wurde, nicht sämtliche reducirt Formen; aber ausserdem nimmt sie auch reductible Formen in sich auf, insofern als unter Formen mit abwechselnden Knotenpunkten (monotypen Formen nach Listing) auch solche vorkommen können, welche man noch einer Reduction unterwerfen kann, gemäss des zweiten der allgemeinen, auf Reduction bezüglichen Sätze. Unterscheidet man die beiderlei Arten von Reductionen als Reductionen der ersten oder zweiten Art, je nachdem man, um sie ausführen zu können, die relative Lage der beiden Aeste, welche im betref-

fenden Knotenpunkte sich überkreuzen, nicht zu kennen braucht, oder die Kenntniss derselben erforderlich ist, so gilt allerdings der Satz :

Sind bei einer beliebigen Kurve die Reductionen der ersten Art ausgeführt und ist dieselbe alsdann nur mit abwechselnden Knotenpunkten behaftet, so sind keine Reductionen der zweiten Art an derselben mehr möglich.

Zieht man ferner die an und für sich klaren Sätze noch zu Hülfe: Zwei reducirte Formen mit verschiedener Anzahl von Knotenpunkten sind nicht in einander transformirbar, und

Verschlingungen, deren Projectionen nicht in einander transformirt werden können, können selbst nicht in einander transformirt werden, so erkennt man, dass die Anzahl verschiedener Verschlingungen einer geschlossenen Kurve im Raume unendlich gross ist.

Denn nähme man an, diese Anzahl sei endlich, so kann man die endliche Anzahl von Verschlingungen angeordnet denken nach der Anzahl von 3 an der Knotenpunkte in den reducirten Formen ihrer Projectionen. Die grösste vorkommende Zahl von Knotenpunkten sei n und es werde angenommen, dass sämtliche Knotenpunkte abwechselnde seien. (Denn wäre diess nicht der Fall, so erhielte man eine andere reducirte Form, indem man genau den gegebenen Zug nimmt, an welchem als reducirter Form entsprechend keine Reductionen der ersten Art möglich sein dürfen, und die Knotenpunkte als abwechselnde bezeichnet — diese reducirte Form werde dann an Stelle der zuerst gewählten gesetzt.) Ein Stück AB des Kurvenzuges, auf welchem kein Knotenpunkt liegt, werde ausgeschieden, ebenso wie ein entsprechendes Stück AB auf irgend welcher reducirten Form mit abwechselnden Knotenpunkten und

die so erhaltenen vier Endpunkte AB werden schliesslich so verbunden, dass der jetzt entstehende Zug nur abwechselnde Knotenpunkte besitzt. Da dieses jederzeit möglich ist, so ist auch die neue Form reducirt.

Von einem Knotenpunkte aus gelangt man nach demselben zurück, nachdem man eine gerade Anzahl¹⁾ von Knotenpunkten überschritten hat. In Folge dessen ist es möglich, einen jeden beliebigen in sich zurückkehrenden Zug, welcher erzeugt worden ist, durch ein Beschreiben ohne Unterbrechung und Wiederholung, zu bezeichnen mit abwechselnden Knotenpunkten, oder nach Ausführung der Reductionen erster Art zum Ausgangspunkt zu machen für eine Verschlingung.

Anmerkung. Perverse Formen sind im Allgemeinen nicht in einander überführbar. Das Verhältniss derselben zu einander hat ein ganz entsprechendes in der Ebene. Während man in die Ebene eine 1 schreibt, schreibt gleichsam die Ebene auf ihre Rückseite eine $\mathbf{1}$. Ist auf der einen Seite der Ebene eine 1 und eine $\mathbf{1}$ verzeichnet, so sind beide durch blosses Verschieben in der Ebene nicht mit einander zur Deckung zu bringen; es ist ein Umklappen um eine Linie der Ebene, also die Zuhülfnahme der dritten Dimension erforderlich. Dem entsprechend ist eine räumliche Form im Allgemeinen nicht in ihre perverse überführbar, weil dieselbe in den Raum von drei Dimensionen gebannt und das Umklappen nicht möglich ist. Doch das Resultat dieses Prozesses lässt sich aufzeigen. Dem Umklappen um eine Linie in der Ebene würde entsprechen eine Drehung um eine Ebene im Raume. Die einzelnen Punkte der betreffen-

¹⁾ Zweimal überschrittene Knotenpunkte sind, wie schon oben S. 16 für sich selbst benachbarte besonders hervorgehoben, hierbei doppelt gezählt.

den Figur würden dabei Kreisbögen beschreiben, welche jedoch, da in einem Punkte nur drei auf einander senkrechte Gerade anschaulich vorgestellt werden, nicht zur Anschauung gebracht werden können. Bis auf zwei Punkte derselben, wovon der eine der gegebene Punkt der Figur, der andere derjenige wäre, bei welchem nach einer halben Umdrehung die Figur wieder in den Raum von drei Dimensionen zurückträte (ganz entsprechend wie bei der Drehung um eine Gerade in der Ebene) und dieser Punkt läge eben so weit hinter der festen Ebene, wie der gegebene vor derselben. In der That, hält man eine Verschlingung vor den Spiegel, so erblickt in demselben der Davorstehende deren perverse Form.

II.

Wenn auch im Vorhergehenden theilweise neue Sätze von mir gegeben wurden, so ist doch die Darstellung der Verschlingung dieselbe wie bei Listing, nämlich durch orthogonale Projection auf eine Ebene. Die Darstellungsweise, welche im Folgenden angewendet wird, erscheint mir der topologischen Natur des Problems entsprechender. Nicht allein in ihren Zielen, sondern auch in den Methoden wird Topologie sich von verwandten Wissenschaften unterscheiden. Eine solche specielle Methode liegt z. B. im schon angewandten Princip der stetigen Umformung. Nach diesem Princip würde es in Bezug auf die Verschlingung topologisch ganz gleichgültig sein, ob man von Verschlingung zweier Kreise oder zweier Ellipsen spricht.

Gewisse Probleme aber werden ebenso wie gewisse Methoden Topologie verknüpfen mit verwandten Wissenschaften. So der Euler'sche Satz vom Polyeder. In dieser Hinsicht vergleiche man die Behandlung, welche er bei v. Staudt¹⁾ findet, mit der oben citirten Listing'schen Abhandlung; die Geometrie der Lage, die Wissenschaft, „welche des Messens nicht bedarf“, würde sich sehr nahe berühren mit Topologie. Die Umschlingungen zweier geschlossener Linien zu zählen, nennt Gauss²⁾ „eine Haupt-

¹⁾ Geometrie der Lage von Dr. Georg Karl Christian v. Staudt. Nürnberg, 1847. S. 20.

²⁾ Gauss' Werke, hrsggeg. von der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. V. Bd. S. 605.

aufgabe aus dem Grenzgebiet der Geometria Situs und der Geometria Magnitudinis“ und er gibt die Zahl m dieser Verschlingungen durch die Gleichung:

$$\iint \frac{(x^1 - x) (dy dz^1 - dz dy^1) + (y^1 - y) (dz dx^1 - dx dz^1) + (z^1 - z) (dx dy^1 - dy dx^1)}{[(x^1 - x)^2 + (y^1 - y)^2 + (z^1 - z)^2]^{\frac{3}{2}}} = 4 m \cdot \pi$$

Dabei bezeichnen $x y z$ die Coordinaten eines Punktes der ersten, $x^1 y^1 z^1$ der zweiten Linie und ist das Integral hinstreckt durch beide Linien. Es fesselt die Gleichung einer Kurve in Coordinaten dieselbe in einer Weise, wie sie hier gewählter, beweglicher Auffassung fremd ist.

Die Darstellung der verschlungenen Kurve soll aber im Folgenden geschehen auf einer ebenen Windungsfläche.

* * *

Die Windungsflächen, welche im Folgenden angewendet werden, werden behaftet gedacht mit einem einzigen Windungspunkt, in welchem die verschiedenen Blätter zusammenhängen und von welchem der Einfachheit halber geradlinige Uebergangslinien ausgehen, längs welchen einzelne Blätter ineinander übergehen. Diese Uebergangslinien führen bekanntlich zu einer Vorstellung eigenthümlicher Art betreffend das Durchsetzen von Flächen. Neumann¹⁾ bemerkt in dieser Beziehung: „Wir setzen nämlich ein für allemal fest, dass zwischen zwei Flächen-theilen, welche einander in irgend einer Linie durchsetzen, längs dieser Linie kein Zusammenhang, also auch keine Nachbarschaft stattfinden soll.“ (S. 163.) Hierauf giebt Neumann drei Methoden an, die ihrer Definition nach zweiblättrige Windungsfläche

¹⁾ Neumann, Vorlesung über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Leipzig, 1865.

erster Ordnung mit einem Windungspunkt und einer Uebergangslinie zu erzeugen. Die dritte dieser Methoden ist die folgende (S. 167). Die beiden Kreise der Fig. 1, welche durch den Knotenpunkt bei D in einander übergehen, werden durch einen Kegel von einem Punkte C des Raumes projectirt. Die Kegelspitze C wird alsdann der Ebene der Kreise immer mehr genähert gedacht, bis sie schliesslich bei C in dieselbe hineinfällt. C ist dann der Windungspunkt, CD die Uebergangslinie der erhaltenen zweiblättrigen Windungsfläche und Fig. 3 zeigt wie beide Blätter in einander übergehen.

Hier mag nun gleich Folgendes bemerkt werden. Anstatt des Halbstrahlenkegels von C aus kann man sich die Projection ausgeführt denken durch einen vollkommenen Strahlenkegel, indem man zu jedem projectirenden Halbstrahl den ergänzenden Halbstrahl hinzugefügt denkt. Führt man alsdann die gleiche Operation wie oben aus, so wird man ausser der erwähnten noch eine zweite Windungsfläche erhalten. Beide Windungsflächen haben denselben Windungspunkt C — die Uebergangslinie der zweiten wäre die Vorlängerung von DC . Beschreibt ein Punkt irgend eine Kurve in der ersten Windungsfläche, so erhält man eine entsprechende Kurve in der zweiten Windungsfläche, wenn man die Punkte der ersten Kurve mit dem Windungspunkt verbindet und den Strahl um sein Gleiches rückwärts verlängert. Es gilt nun der Satz: Beschreibt der Punkt in der einen Windungsfläche eine geschlossene Kurve mit irgend welchen Verschlingungen, so beschreibt der entsprechende Punkt in der zweiten Windungsfläche die perverse Form dieser Verschlingung.

Dieser Satz ist desshalb hier schon ausgesprochen worden, damit einerseits eine gewisse Berechtigung der Windungsfläche zur Darstellung topologischer Beziehung aufgezeigt werde, ander-

seits aus dem Grunde, dass von einer Form und ihrer perversen nur eine von beiden entwickelt zu werden braucht.

Zunächst sei gegeben eine Windungsfläche erster Ordnung mit einem Windungspunkt ω und einer Uebergangslinie a (Fig. 4); es handle sich darum eine geschlossene Kurve mit einem Knotenpunkte (also etwa von der Art der in Fig. 1 abgebildeten) zu verzeichnen. Die Kurven, deren Verschlingungen untersucht werden sollen, sind, wie ganz vornen in der Einleitung erwähnt wurde, der Art, dass Doppelpunkte in ihr nicht vorkommen. Wenn demnach auf der Windungsfläche ein Punkt vorkommt, durch welchen 2 Aeste der Kurve gehen, so müssen diese Aeste in verschiedenen Blättern der Windungsfläche liegen (was in der Zeichnung durch I—II... III - - etc. unterschieden werden kann). In Folge dessen erkennt man, dass zur Herstellung einer Kurve der verlangten Art ein zweimaliger Umlauf um den Windungspunkt ω erforderlich ist (Fig. 4). Der einfacheren Ausdrucksweise halber denke man sich die beiden Blätter der Windungsfläche ausgebreitet auf einer horizontalen Ebene. Als dann wird man einen Umlauf um den Windungspunkt unterscheiden können als einen positiven oder negativen, je nachdem dabei eine Drehung beständig zur Linken oder zur Rechten erfolgt. Man gehe nun in dem vorhergehenden Beispiel von dem Punkte A der Uebergangslinie aus, so hat man nach einem positiven Umlaufe um ω die Wahl, ob man den zweiten Uebergangspunkt A_1 in der Uebergangslinie a näher oder entfernter von ω wählen will. Je nachdem diese Wahl getroffen wird, ist der im zweiten Umlaufe entstehende (einzige) Knotenpunkt der Art, dass in der Projection auf eine horizontale Ebene dem Flächenstück um ω nach Listing's Symbolik das eine oder andere der beiden Zeichen λ , δ zukommt; vorausgesetzt natürlich, dass man in beiden Fällen von A aus ausgegangen ist in demselben Blatte der Windungsfläche. Man erkennt sofort die

topologische Art eines Knotenpunktes, nur vorausgesetzt, dass man denselben nicht in der Uebergangslinie a selber angenommen habe.

Eine ganz beliebige Verschlingung sei gegeben und dieselbe auf einer Windungsfläche darzustellen. Zunächst ordne man die Verschlingung so an, dass ihre orthogonale Projection auf eine Ebene beim vollständigen Durchlaufen der Kurve von dem entsprechenden Punkte derartig umfahren wird, dass Drehung stets nur in einem Sinne erfolgt. Diess ist, wie schon in der Einleitung erwähnt, den über die Kurve gemachten Voraussetzungen gemäss, stets möglich. Alsdann nehme man in der Projectionsebene irgend einen beliebigen Punkt C an und ziehe durch denselben einen Strahl. Eine der Tangenten der Projection, welche diesem Strahl parallel ist, sei gewählt; der Tangente entspricht ein Berührungspunkt, diesem ein Punkt der Kurve und von diesem Kurvenpunkt an werde die gegebene Kurve Punkt für Punkt vollständig umfahren. Denkt man sich in jedem einzelnen entsprechenden Punkte in der Projection alsdann immer die Tangente construirt und zu dieser durch C einen parallelen Strahl gezogen, so wird nach dem vollständigen Umlauf dieser Strahl wieder in seine anfängliche Lage zurückgekehrt sein, dabei aber eine gewisse Anzahl von Umdrehungen um C ausgeführt haben. Diese Anzahl n der Umdrehungen gibt die Zahl der Blätter der zu wählenden Windungsfläche. Die Projection werde jetzt noch weiter umgeformt. Die einzelnen Theile werden der Art verschoben, dass sich ein Flächenstück angeben lässt, um welches beim Umfahren der Kurve gerade n Umläufe gemacht werden. In diesem Flächenstück werde der Windungspunkt ω der n blättrigen Windungsfläche angenommen und von ω aus werden zunächst so viele Strahlen gezogen, dass in jedem entstehenden Winkel in der Projection nur 1 Knotenpunkt vorkommt. Von irgend einem Knotenpunkt werde jetzt

als erstem ausgegangen, indem man die beiden in demselben sich kreuzenden Aeste der Art in zwei Blätter der Windungsfläche verlegt, dass der Knotenpunkt dargestellt wird, wie es die gegebene Projection verlangt.

Die übrigen Strecken der Kurve in demselben Winkel vertheile man ganz nach Belieben in die verschiedenen Blätter. In dem, positivem Umfassungssinne gemäss, anstossenden Winkel überkreuzen sich wieder zwei Strecken der Kurve. Von zwei Fällen ist nun einer möglich; entweder die angenommene Vertheilung der Strecken in die verschiedenen Blätter der Windungsfläche ergibt den Knotenpunkt schon in seiner richtigen Art und Weise, alsdann hat man weiter nichts zu thun, als die einzelnen Strecken in ihren Blättern in den zweiten Winkel fortzusetzen; oder die angenommene Vertheilung würde in ihrer Fortsetzung den Knotenpunkt umkehren, alsdann hat man den von ω ausgehenden Strahl als Uebergangslinie zu bezeichnen und zwar als Uebergangslinie derjenigen beiden Blätter, welche die sich im betreffenden Knotenpunkte kreuzenden Strecken enthalten. Auf diese Weise fahre man fort, bis auch der letzte Knotenpunkt entsprechend dargestellt ist. Zwischen dem letzten Knotenpunkt und dem Strahl, von welchem die zuerst beliebig angenommenen Strecken der Kurve ausgehen, schalte man nun ebensoviel Uebergangslinien ein, als erforderlich sind, die zuletzt erhaltenen Strecken auf den ihnen vorgeschriebenen Bahnen in die zuerst angenommenen Blätter zu überführen. Letztere Ueberführung ist selbstverständlich stets möglich. Auf diese Weise ist nachgewiesen, dass jede Verschlingung dargestellt werden kann auf einer Windungsfläche mit einem Windungspunkt.

Was die Uebergangslinien betrifft, so herrscht in Bezug auf die Wahl derselben eine gewisse Freiheit in der Art, dass es möglich ist, eine gegebene Verschlingung mit der gleichen

Anzahl Uebergangslinien auf verschiedene Weise darzustellen, so dass die Uebergangslinien verschiedene Blätter in den verschiedenen Fällen verbinden. In Bezug hierauf kann zum Voraus bemerkt werden, dass bei einer 3blättrigen Windungsfläche das oberste und unterste Blatt (die Windungsfläche immer auf einer horizontalen Ebene ausgebreitet gedacht) offenbar vertauscht werden können, denn eine Verschlingung ändert durch Umdrehen ihren topologischen Charakter nicht. Ferner ist die obenerwähnte Freiheit in Wahl der Uebergangslinien von vornherein dadurch beschränkt, dass bei einer n blättrigen Windungsfläche nach n Umläufen um den Windungspunkt in das Ausgangsblatt zurückgekehrt werden muss. Die weitere Erörterung solcher und ähnlicher Fälle würde jedoch zu weit führen; es soll vielmehr nur im Anschluss an die letztere Bemerkung in Bezug auf die Windungsfläche erster Ordnung Folgendes erwähnt werden.

In einer zweiblättrigen Windungsfläche mit nur einem Windungspunkte ω muss die Anzahl der gewählten Uebergangslinien stets eine ungerade Zahl sein; sobald es sich darum handelt, nach zwei Umläufen um den Windungspunkt wieder in das ursprüngliche Blatt zu gelangen. Würde man eine gerade Anzahl von Uebergangslinien von ω ausgehen lassen, so würde schon ein Umgang genügen, um wieder in das gleiche Blatt zu gelangen; es würde nie gelingen von irgend einem Punkte aus zu dem direkt darunter oder darüber liegenden zu gelangen — die Windungsfläche würde gewissermassen verfallen in 2 getrennte Stücke.

Die Verschlingungen einer einzelnen Kurve, welche zu ihrer Darstellung einer Windungsfläche erster Ordnung bedürfen, haben aber auch in der That in ihrer reducirten Form 3, 5, $2n + 1$ abwechselnde Knotenpunkte. In Folge dessen ergibt sich in diesem Falle sofort, dass die Anzahl der Uebergangs-

linien gleich der Anzahl der Knotenpunkte der reducirten Form gewählt werden kann und mindestens ihr gleich sein muss. Die einzelnen Knotenpunkte liegen dann zwischen je zwei Uebergangslinien. Denkt man sich ferner längs der so dargestellten verschlungenen Kurve einen Schnitt in das betreffende Blatt der Windungsfläche geführt, so fällt ein Stück aus der Windungsfläche heraus, welches die Kurve zur Begrenzung hat. Diese Begrenzung durchsetzt diess Stück Windungsfläche aber ebenso oft als Uebergangslinien vorhanden sind, d. h. ebenso oft als die Anzahl der Knotenpunkte der reducirten Form beträgt.

Hier ist es am Platze auf einen Unterschied in der Auffassungsweise der Windungsfläche aufmerksam zu machen. Die Windungsfläche ist eine einfach zusammenhängende Fläche, transformirbar durch stetige Umformung in eine Elementarfläche (Neumann, Vorlesungen S. 218). Diese Umformung kann hier offenbar nur insofern gestattet werden, als sie nur stetige Umformung der Randkurve involvirt. Selbstverständlich wird durch diese Voraussetzung der Zusammenhang der Windungsfläche nicht erhöht und bleibt dieselbe einfach zusammenhängend nach wie vor.

Die Untersuchungen, zu welchen diese neue Darstellungsweise führt, sind ausserordentlich mannigfaltig. Zunächst ergibt sich eine gewisse, nicht willkürliche Anordnung der Verschlingungen nach den Flächen.

Eine Verschlingung wird ferner nicht immer in ihrer reducirten Form dargestellt — diess führt auf eine genauere Untersuchung der Reductibilität. Die Darstellung der Verschlingung ergibt einen gewissen Rhythmus der Verbindung der einzelnen Blätter der mehr als zweiblättrigen Windungsfläche, welcher Rhythmus ertönt, wenn man die verschlungene Kurve

unaufhörlich sich durchlaufen denkt. Unter gewissen Einschränkungen wird dieser Rhythmus charakteristisch sein für die Verschlingung. Doch so anziehend diese Untersuchungen sein mögen, so würde ein Eingehen auf dieselben hier zu weit führen und den Zweck der Schrift überschreiten. Es handelt sich vielmehr jetzt darum, einen Versuch zu entwickeln, verschiedene Verschlingungen organisch zu verknüpfen.

III.

Der Umlauf um den Windungspunkt ω in der Windungsfläche I. Ordnung mit einer Uebergangslinie a , Fig. 4, stellt eine unverschlungene, geschlossene Kurve dar. Aber dieser Umlauf ist behaftet an irgend einer Stelle mit einem Knotenpunkte und diese Eigenschaft befähigt ihn, als Element zu dienen im Aufbau von Verschlingungen. Damit jedoch ein solcher Aufbau stattfinden könne, ist noch eine willkürliche Festsetzung erforderlich. Denn an und für sich schliessen Verschlingungen sich gegeneinander, also auch gegen ein Drittes, die unverschlungene Kurve, ab. Die Vorstellung des Umlaufs um den Windungspunkt wird aber folgendermassen gebildet werden. Man wird ausgehen von irgend einem Punkt der Kurve in dem einen Blatte, wird sich in Gedanken bewegen auf der Kurve in diesem Blatte bis zur Uebergangslinie, wird alsdann zurücklegen das Stück der Kurve, welches im andern Blatte sich befindet und wird schliesslich in das ursprüngliche Blatt und in den Anfangspunkt zurückkehren. Dieser Prozess kann mehrmals vorgestellt werden. Er kann ausgeführt gedacht werden in 2 verschiedenen Windungsflächen. Die beiden Kurven, welche man alsdann erhielte, würden sich gegeneinander abschliessen vollständig wie zwei Zahlen. Aber dieses Abschliessen liesse durch eine, freilich willkürliche Festsetzung, sich aufheben.

Die graphische Addition von Linien deckt sich nicht vollkommen mit der Addition der Zahlen. Auch dann nicht, wenn

durch die complexe Zahl die Identität beider Operationen noch näher gezeigt scheint. Denn im Begriff der Zahl liegt ein vollständig in sich Abgeschlossenes; die Vorstellung eines Stückes einer Geraden ist nicht homogen in dieser Weise; sie ist beständig verknüpft mit der Vorstellung zweier ausgezeichneten Punkte der Geraden, ihres Anfangs- und Endpunktes; gerade durch diese ausgezeichneten Punkte aber werden die Geraden der graphischen Addition zugänglich. In Rücksicht hierauf liesse sich die erwähnte willkürliche Festsetzung der Art treffen, dass man einen Punkt jedes Umlaufs auszeichnet als Anfangs- und Endpunkt und den Anfangspunkt des einen verbindet mit dem Endpunkt des andern Umlaufs. Diess würde zu keinen neuen Resultaten führen. Aber der oben angegebene Prozess ist nicht der einzige Weg, auf welchem die geschlossene Kurve um den Windungspunkt erhalten werden kann.

Irgend ein Strahl vom Windungspunkte aus repräsentire 2 Strahlen, einen in jedem Blatte der Windungsfläche; ein Strahl aus ω ergibt also 2 Schnittpunkte mit der Kurve, insofern der Strahl doppelt zählt. Diese beiden Punkte liegen in verschiedenen Blättern; sie seien bezeichnet mit A und A_1 . Von zwei solchen Punkten werde ausgegangen und die Bewegung, welche in diesem Falle um den Windungspunkt herum die geschlossene Kurve erzeugt, schreitet gleichzeitig in beiden Blättern vor. Die Bewegung von A ausgehend endigt in A_1 und die von A_1 ausgehende in A . Diese neue Auffassungsweise erfordert demnach zur Erzeugung der Kurve zwei Anfangspunkte und zwei Endpunkte. Dieselben werden zweckmässig gewählt auf der Uebergangslinie a (A und A_1 in Fig. 4). Die Bewegung für einen jeden der Punkte findet alsdann statt nur in je einem Blatte der Windungsfläche. Dieser Prozess kann mehrmals ausgeführt gedacht werden. Und da ihm ausgezeichnete Punkte zukommen, lassen sich mehrere solche Prozesse ver-

knüpfen zu einem neuen Prozess. Die Verknüpfung von zwei Prozessen zu einem neuen Prozess könnte die Summe der zwei Prozesse genannt werden. Eine solche Summe liesse sich aber folgendermassen herstellen. Man denke sich den einfachen Prozess ausgeführt in zwei Windungsflächen W_1 und W_2 . Alsdann werde in W_1 durch beide Blätter ein Schnitt geführt, längs eines Strahles von ω aus, welcher die Kurve schneidet in A und A . Nun werde die Windungsfläche W_1 gleichmässig zusammengezogen, bis sie in beiden Blättern nur den halben Raum einnimmt — man denke sich etwa die eine Hälfte der Begrenzung, welche durch den erwähnten Schnitt erzeugt wurde, festgehalten und die andere Hälfte um den Windungspunkt ω gedreht, dabei die Masse der Fläche vor sich herschiebend. Ebenso werde mit der Windungsfläche W_2 verfahren und beide Windungsflächen auf eine horizontale Ebene neben einander gelegt, so dass sie dieselbe jetzt gleichmässig bedecken. Waren beide ursprüngliche Prozesse vollkommen in gleicher Weise in beiden Windungsflächen ausgeführt und diese Flächen von Anfang an gleich orientirt und ohne Umkehrungen in die neuen Lagen gebracht, so ergeben sich beim Zusammenfallen der Windungspunkte ω_1 und ω_2 der beiden Flächen auch die richtigen Verknüpfungen der Kurvenanfangs- und Endpunkte. Verschmelzen ausserdem die beiden oberen und die beiden unteren Blätter der Windungsflächen unter sich, so erhält man ausser der Verknüpfung auch die Darstellung des Resultats auf einer einzigen Windungsfläche. Man sieht ferner, dass die Wahl des Strahles, längs welcher der Schnitt zur Bestimmung von A und A geführt wurde, vollkommen gleichgültig war, da derselbe schliesslich verschwindet. Statt seiner konnte auch die Uebergangslinie a gewählt werden.

Das Resultat der Vereinigung beider Prozesse kann noch zutreffender, die angegebene Art der Verknüpfung als noth-

wendig erweisend folgendermassen hergeleitet werden. Man denke sich den einfachen Prozess in der neuen Weise von zwei Punkten aus in derselben Windungsfläche und mit derselben Kurve zweimal nach einander ausgeführt. Alsdann werden alle Kurvenpunkte zweimal durchlaufen worden sein, aber man denke sich die Reihenfolge beider Punkte von einander geschieden, ebenso die ganze Windungsfläche mit Uebergangslinie doppelt. Indem man beide Systeme ineinander verschiebbar annimmt, bringe man den zweiten Prozess zur Anschauung dadurch, dass man das zweite System herauszieht aus dem ersten, das erste zurückdrängend längs der Uebergangslinie a .

Anknüpfend an diese letztere Vorstellungsweise ist es leicht, das Resultat der Addition von 3, 4, 5 einfachen Processen anzugeben. Das Resultat der Addition von 3 einfachen Processen zeigt Fig. 6; es ist die einfachste Verschlingung einer geschlossenen Kurve und identisch mit der durch Fig. 2 dargestellten Verschlingung. Eine weitere reducirte Form gibt die 5fache Verknüpfung u. s. f., überhaupt wird eine ganze Reihe von Formen mit ungerader Anzahl Knotenpunkte erhalten. Aber auch die geradzahlige Verknüpfung mehrerer einfacher Prozesse führt zu Verschlingungen. Diese Verschlingungen werden gebildet von 2 Kurven; und wie schon in der Einleitung erwähnt, zeigt sich hier, aber jetzt gleichsam organisch, die Verschlingung zweier Kreise — in welche die bei einer zweimaligen Verknüpfung des ersten Processes erhaltenen Kurven verwandelt werden können, als der einfachste Fall nicht reductibler Kurvenverschlingung. Je mehr Wiederholungen des ursprünglichen Processes erforderlich sind zur Herstellung einer Verschlingung, um so verschlungener wird dieselbe sein, um so mehr Knotenpunkte wird ihre reducirte Form besitzen.

Die Verknüpfung zweier verschiedener Verschlingungen in der Windungsfläche I. Ordnung kann jetzt folgendermassen de-

finirt werden. Ein jede Verschlingung erfordert zu ihrer Herstellung je eine gewisse Anzahl Z_1, Z_2 von Wiederholungen des ursprünglichen einfachen Processes. Die Verknüpfung beider Verschlingungen kann genannt werden diejenige Verschlingung, welche erzeugt wird durch die Wiederholung des ursprünglichen Processes so oft als die Summe der Zahlen $Z_1 + Z_2$ beträgt. Diese Festsetzung ist willkürlich, ihre Rechtfertigung muss in ihrem Erfolge liegen.

Mit dieser Entwicklung einer Verknüpfung von Verschlingungen auf der zweiblättrigen Windungsfläche ist der Weg angezeigt für die Verknüpfung auf einer n blättrigen Windungsfläche. Die Entwicklungen lassen grosse Mannigfaltigkeit erwarten, anknüpfend an das einfache Princip der Herstellung des ersten Umlaufs um den Windungspunkt durch ein einmaliges Herumgehen um denselben aber zugleich in allen n Blättern.

Um eine geschlossene Kurve durch alle Blätter um den Windungspunkt in der Windungsfläche zweiter Ordnung mit den Blättern I, II, III zu erhalten, ist die Annahme von zwei Uebergangslinien erforderlich. Möglich sind drei Uebergangslinien (I II), (I III), (II III), von denen je zwei den Zusammenhang vollständig herstellen. Die Verschlingungen, welche man erhält aus der Vertauschung von (I II) mit (II III), während alles andere ungeändert bleibt, sind offenbar topologisch dieselben, da diess nur einer Umkehrung der ganzen Windungsfläche entspricht. Es seien zunächst (I II) und (II III) als Uebergangslinien gewählt; die Windungsfläche auf einer horizontalen Ebene ausgebreitet, I das obere, II das mittlere, III das untere Blatt, und die Uebergangslinien so angeordnet, dass (I II) als rückwärtse Verlängerung von (II III) erscheint. Soll alsdann der erste Umlauf um den Windungspunkt so eingerichtet werden, dass die beiden Knotenpunkte, welche auftreten werden, von Hause aus abwechselnd sind, so müssen beide auf derselben

Seite einer durch (I II) (II III) gehenden verticalen Ebene liegen. Denn zunächst ergibt sich aus der gestellten Bedingung, dass beide nicht dem Aste, insofern er in Blatt I oder insofern er in Blatt III liegt, angehören können, sie müssen also gebildet werden durch die Ueberkreuzungen $\frac{I}{II}$ und $\frac{II}{III}$. Liege nun $\frac{I}{II}$ auf der einen Seite der erwähnten Verticalalebene und werde der Ast nach der Uebergangslinie (I II) hin durchlaufen, so wird $\frac{I}{II}$ als oberer Knotenpunkt überschritten. Da aber I an der Uebergangslinie (I II) übergeht in II, so kann jenseits der Verticalalebene der zweite Knotenpunkt $\frac{II}{III}$ nicht angenommen werden, da er sonst gegen die Voraussetzung benachbart als oberer Knotenpunkt durchlaufen werden würde.

Nach Annahme der Uebergangslinien ist so der erste Umlauf, wenn er abwechselnde Knotenpunkte ergeben soll, bestimmt und zwar, wie man leicht weiter erkennt, bis auf die Wahl des Zeichens δ oder λ für den äussern Raum in der orthogonalen Projection.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich ausführen nach Wahl der Uebergangslinien (I II) und (I III) als erste. (Fig. 7.)

Von beiden Arten sei eine gewählt und ein vollständiger Umlauf um den Windungspunkt ω verzeichnet. Alsdann werde dieselbe geschlossene Kurve erzeugt durch Ausgehen von den Punkten der einen Uebergangslinie und durch Fortschreiten der Bewegung gleichzeitig in sämtlichen 3 Blättern der Windungsfläche. Nachdem zu den Ausgangspunkten zurückgekehrt worden ist, kann der Process nochmals ausgeführt gedacht werden, indem man sich die Kurve, sowie die Windungsfläche mit ihren Uebergangslinien doppelt vorstellt. Die Verknüpfung beider einfacher Processe kann alsdann zur Anschauung auf einer einfachen Windungsfläche zweiter Ordnung gebracht werden, indem man

sich das zweite System herausgezogen denkt aus dem ersten; beide Systeme kann man sich gleichmässig zusammenziehend vorstellen und das zweite herausziehen aus dem ersten, indem man die eine der Uebergangslinien, die, welche den Ausgangspunkt des einfachen Processes bildet und welche den Uebergang beider Systeme vermittelt, dreht um den Windungspunkt, dabei die Masse des einen Systems gleichsam vor sich herschiebend, die des andern nachziehend.

Ganz in gleicher Weise lässt die Verknüpfung irgend eines zweimal wiederholten ersten geschlossenen Processes sich herleiten. Und sofort ergibt sich hier die, unter gewissen Voraussetzungen mögliche Verknüpfung verschiedener geschlossener Processes. Ja sogar die Erweiterung lässt diese Vorstellung der Verknüpfung zu, dass Processes, welche Windungsflächen verschiedener Ordnung ursprünglich angehören, sich verknüpfen lassen. Die der Windungsfläche niederer Ordnung angehörende Verschlingung bedarf dazu nur einer passenden unverschlungenen Ergänzung, durch welche die Zahl der Blätter der Windungsflächen ausgeglichen wird.

Nach der Wahl des ursprünglichen Processes wird man durch Verknüpfung gleicher Zahl Wiederholungen desselben im Allgemeinen verschiedene Verschlingungen erhalten; doch kann auch der Fall eintreten, dass das Resultat auf das gleiche hinauskommt. Die Fig. 5 abgebildete Verschlingung wurde zuerst erhalten durch Verknüpfung der zweimaligen Wiederholungen eines Processes, dargestellt auf der Windungsfläche zweiter Ordnung mit zu Grunde gelegten Uebergangslinien (I III) und (II III) und zwei Knotenpunkten, welche kurz bezeichnet wären mit $\left(\begin{smallmatrix} I \\ II \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} II \\ III \end{smallmatrix}\right)$.

Aber nicht allein zum Zwecke der Erfindung neuer Verschlingungen kann die Verknüpfung verwendet werden — es

kann dieselbe auch rückwärts dazu dienen, diejenigen einfacheren Processe aufzusuchen, aus welchen irgend eine gegebene, auf der Windungsfläche dargestellte Verschlingung aufgebaut ist. Dabei wird man zum Voraus erwarten können, auf Verschlingungen zu stossen, welche nicht durch schon bekannte sich entwickeln lassen, die gewissermassen die Rolle von Primzahlen in der Reihe der Verschlingungen spielen.

Das Zerfallen der einen Kurve in n Kurven bei dem n -maligen Ausführen und Verknüpfen eines auf der n -blättrigen Windungsfläche dargestellten Processes gibt Anlass zur Untersuchung der Verschlingung beliebig vieler Kurven.

Die Verknüpfung von Verschlingungen, dargestellt ursprünglich auf Windungsflächen verschiedener Ordnung, kann ebenfalls ein Zerfallen in zwei oder mehrere Kurven ergeben. Dabei kann der Fall hergestellt werden, dass von den verschlungenen Kurven einzelne oder dass alle für sich betrachtet schon mit sich selbst verschlungen sind.

Auch auf die Verschlingungen mehrerer Kurven wird die Listing'sche Symbolik anwendbar sein. Allerdings mit der oben erwähnten Erweiterung, dass nämlich der Exponent 1 sehr wohl in den den topologischen Charakter der Verschlingung darstellenden Symbolen vorkommen kann.

So würde auf der Windungsfläche erster Ordnung, auf welcher ein Zerfallen in zwei Kurven erfolgt, diesen Verschlingungen das Symbol $2\delta^{2n} 2n\lambda^2$ oder $2\lambda^{2n} 2n\delta^2$, wo n alle ganzen Zahlen von 2 an bedeutet, zukommen. Und ebenso wie hier den im Symbol $2\delta^{2n+1} (2n+1)\lambda^2$ oder $2\lambda^{2n+1} (2n+1)\delta^2$ zusammengefassten Verschlingungen einer einzigen Kurve $(2n+1)$ als charakteristische Zahl der Durchstosspunkte mit der einfach zusammenhängenden Fläche, deren Rand sie bilden, zukommt, so gibt $2n$ die analoge Zahl für die 2 Kurven, in welche das Zerfallen erfolgte. Hier allerdings wird der Exponent 1 nicht

vorkommen, da auf der Windungsfläche erster Ordnung alle reducirten Formen abwechselnde Knotenpunkte besitzen, weil hier zwei benachbarte Knotenpunkte benachbart sind in Bezug auf beide durch sie gehende Aeste.

Die Verhältnisse auf der Windungsfläche erster Ordnung sind überhaupt von grosser Einfachheit. An ihrer Hand wird es wohl am leichtesten gelingen in die Theorie der Verflechtungen (Gewebe) einzudringen, wozu, wie schon Vandermonde¹⁾ bemerkte, Topologie unter Anderm berufen ist. (S. Anmerkung.)

Aber ehe ich weiter vorgehe, sei es indem ich versuche die Behandlung jenes älteren Problems, oder die Feststellung der Listing'schen Symbolik in der erwähnten Erweiterung oder die Untersuchung der neuen Probleme, zu welchen die Anwendung der Windungsflächen den Anlass gibt, möchte ich das Urtheil bewährter Forscher vernehmen über die Sicherheit meines Weges und die Ziele, welche mir winken.

Anmerkung. Dabei ist unter Umständen eine Aenderung in der Anwendung der Windungsfläche von Vortheil. Solche Aenderungen sind geboten, wenn sie zu neuen Resultaten führen. So würde andere Auffassung der Uebergangslinien bei der früher benutzten Anordnung der Verknüpfung der Verschlingungen Anlass geben zur Verknüpfung perverser Formen, zur Herleitung unverschlungener Kurven aus Verschlingungen, zu in Bezug auf Verschlingungsverhältnisse topologischen Nullen.

Ferner mag hier bemerkt werden, dass die Annahme der Windungsfläche als eben zur Darstellung der Verschlingung

¹⁾ Hist. de l'acad. royale des sciences. S. 566. — M. Vandermonde, Remarques sur les problèmes de situation. Mémoire de l'acad. royale des sciences. 4 Mai 1771.

unwesentlich ist und nur der bequemern Ausdrucksweise wegen gewählt wurde; die Verschlingung kann auf der Riemann'schen Kugelfläche verzeichnet werden, wobei die Uebergangslinien, welche vom Windungspunkt ω ausgehen, sich vereinigen in dem das Unendliche darstellenden Unendlichkeits-Punkt.

Erläuterung der Tafel.

Auf Fig. 1-6 ist im Text verwiesen.

Fig. 7 gibt einen vollständigen Umriss von den Windungspunkten ω einer Windungsfläche zweiter Ordnung, deren Blätter

in einander übergehen, wie Fig. 8 darstellt.

Fig. 9 gibt eine Verschlingung mit 4 abwechselnden Knotenpunkten in ihrer reduzierten Form, erhalten durch zweimaliges

Verknüpfen des in Fig. 7 dargestellten Processes.

Fig. 10 gibt die dreimalige Verknüpfung, welche ein Zerfallen in 3 Kurven zur Folge hat.

Erläuterung der Tafel.

Auf Fig. 1—6 ist im Text verwiesen.

Fig. 7 gibt einen vollständigen Umlauf um den Windungspunkt ω einer Windungsfläche zweiter Ordnung, deren Blätter in einander übergehen, wie Fig. 8 darstellt.

Fig. 9 gibt eine Verschlingung mit 4 abwechselnden Knotenpunkten in ihrer reducirten Form, erhalten durch zweimaliges Verknüpfen des in Fig. 7 dargestellten Processes.

Fig. 10 gibt die dreimalige Verknüpfung, welche ein Zerfallen in 3 Kurven zur Folge hat.

Fig. 1

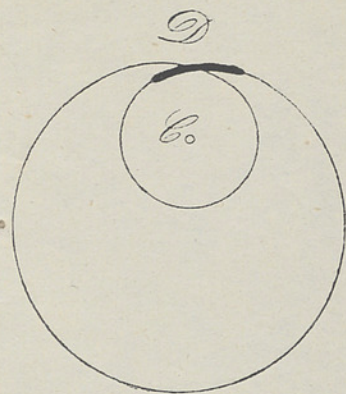


Fig. 2

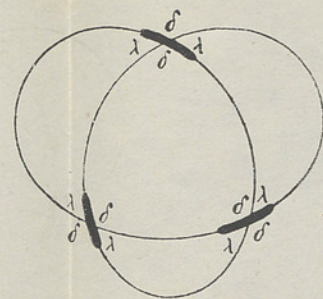


Fig. 5

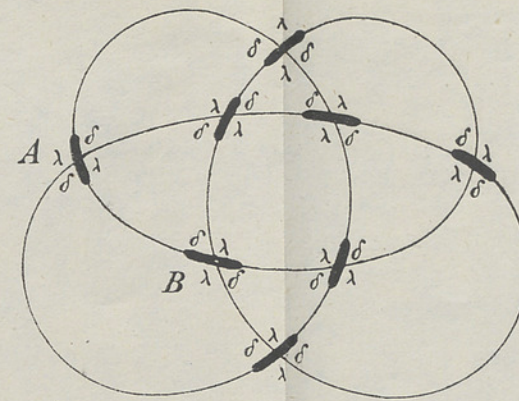


Fig. 9.

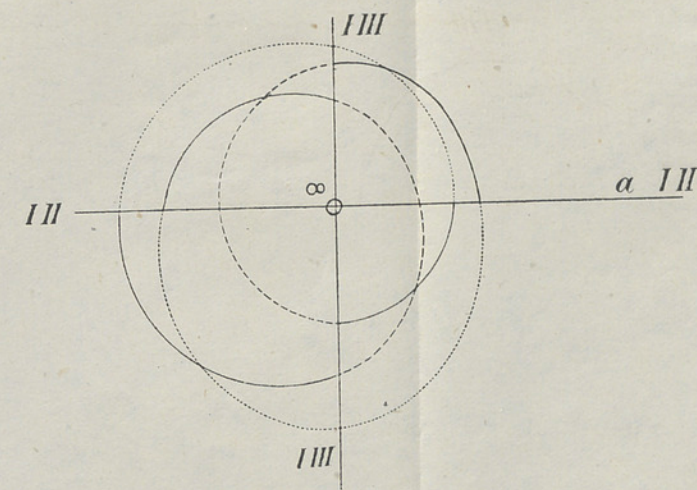


Fig. 3



Fig. 4

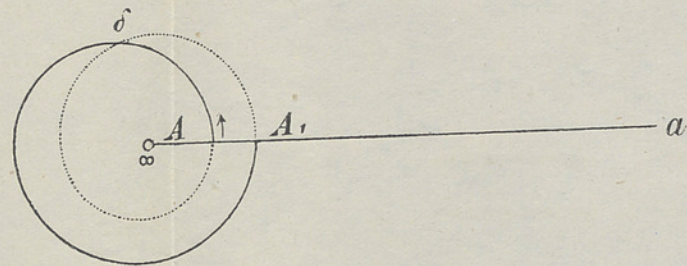


Fig. 7

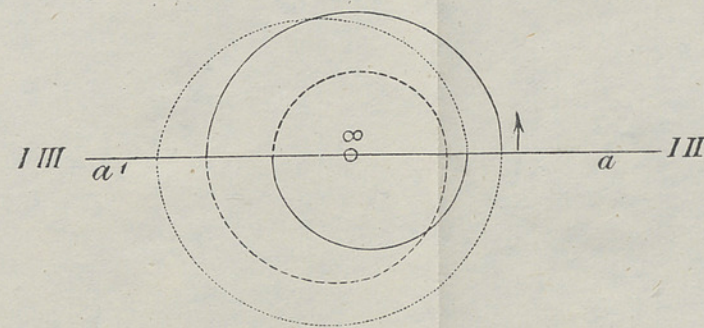


Fig. 10.

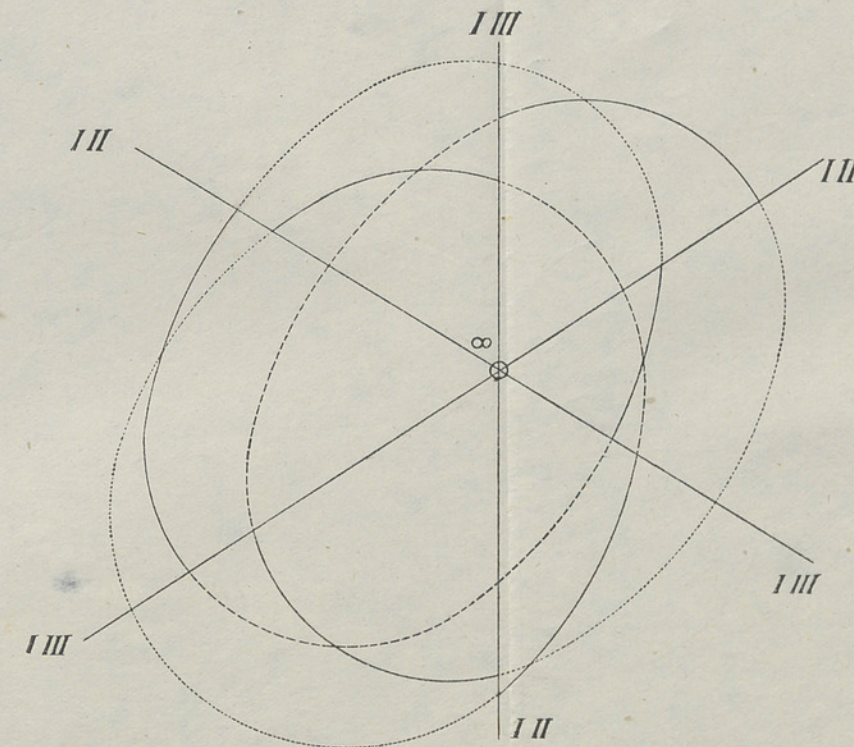


Fig. 6

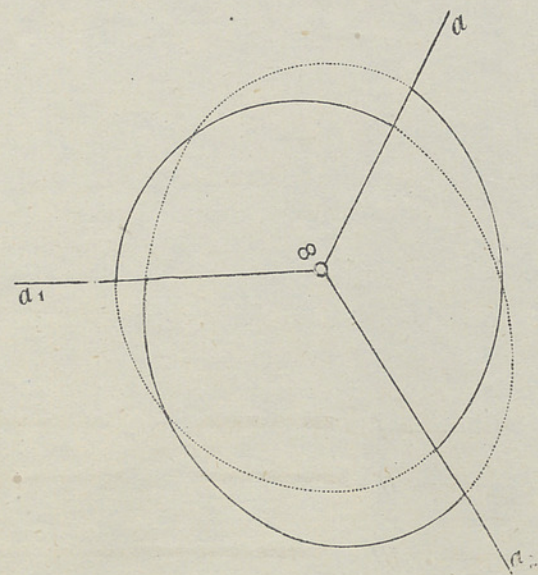


Fig. 8

