INTEGRATION

DES

UNBESTIMMTEN INTEGRALS

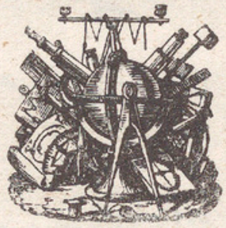
$$\int \frac{x^m \, dx}{(1 + a_0^{q_0} x_0^{q_0})(1 + a_1^{q_1} x^{q_1})(1 + a_2^{q_2}) \cdot \cdot \cdot \cdot (1 + a_{n-1}^{q_{n-1}} x_{n-1}^{q_{n-1}})}$$

Eingereicht

um unter die Docenten der Zürcherischen Hochschule aufgenommen zu werden.

Von

Dr. Fr. Carl Stadlin.



Druck von Orell, Füssli & Comp.

1843.

Es werde folgendes unbestimmte Integrale

$$\int \frac{X^m\,dx}{(1+a_0{}^{q_0}x^{q_0})(1+a_1{}^{q_1}x^{q_1})\ldots(1+a_2{}^{q_2}x^{q_2})\ \ldots\ (1+a_{n-1}{}^{q_{n-1}}x^{q_{n-1}})},$$

zur Bestimmung vorgelegt, wo $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ beliebige von x independente Grössen und:

$$m < q_0 + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1}$$

ist.

Man nehme an es sei q_k von der Form $2p_k$. Bei dieser Annahme hat das Binom $1 + a_k{}^{2p_k}x^{2p_k}$ keinen reellen Faktoren des ersten Grades, wohl aber bilden nachstehende Trimonien die reellen Faktoren des zweiten Grades desselben:

$$1 + 2\,a_k\,x\cos\frac{\pi}{2p_k} + a^2{}_k x^2,$$

$$1 + 2\,a_k\,x\cos\frac{3\pi}{2p_k} + a^2{}_k x^2$$

$$1 + 2\,a_k\,x\cos\frac{5\pi}{2p_k} + a^2{}_k x^2$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$1 + 2\,a_k\,x\cos\frac{(2p_k-1)\pi}{2p_k} + a^2{}_k x^2$$

demnach ist man im Stande die ächt gebrochene rationale Funktion

$$\frac{X^m}{(1+a_0{}^{2p_0}x^{2p_0})(1+a_1{}^{2p_1}x^{2p_1})(1+a_2{}^{2p_2}x^{2p_2})\ \ldots\ (1+a_{n-1}{}^{2p_{n-1}}x^{2p_{n-1}})}$$

in Partialbrüche von der allgemeinen Form

$$\frac{A + Bx}{1 + 2\alpha x + \beta x^2}$$

zu zerlegen, um die Integration der vorgelegten Differenzialfunktion von der Integration der Ausdrücke:

$$\frac{A}{1 + 2\alpha x + \beta x^2}, \quad \frac{Bx}{1 + 2\alpha x + \beta x^2}$$

abhängig zu machen.

Setzt man der Kürze wegen λ_k für $\frac{\pi}{2p_k}$ und bezeichnen $A^{(k)}_{2s_k-1}$, $B^{(k)}_{2s_k-1}$ von x independente, einstweilen unbestimmte Grössen, wo k alle ganzen Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots n-1$$

und s die Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots p$$

der Reihe nach bedeuten, so findet man:

$$\text{I)} \quad \frac{X^m}{\left(1 + a_0^{2p_0} x^{2p_0}\right)\left(1 + a_1^{2p_1} x^{2p_1}\right)\left(1 + a_2^{2p_2} x^{2p_2}\right) \ldots \left(1 + a_{n-1}^{2p_{n-1}} x^{2p_{n-1}}\right)} =$$

$$= \frac{A_1^{(0)} + B_1^{(0)} x}{1 + 2a_0 x \cos\lambda_0 + a_0^2 x^2} + \frac{A_3^{(0)} + B_3^{(0)} x}{1 + 2a_0 x \cos 3\lambda_0 + a_0^2 x^2} + \ldots + \frac{A^{(0)}_{2p_0-1} + B^{(0)}_{2p_0-1} x}{1 + 2a_0 x \cos(2p_0-1)\lambda_0 + a_0^2 x^2}$$

$$+ \frac{A_1^{(1)} + B_1^{(1)} x}{1 + 2a_1 x \cos\lambda_1 + a_1^2 x^2} + \frac{A_3^{(1)} + B_3^{(1)} x}{1 + 2a_1 x \cos 3\lambda_1 + a_1^2 x^2} + \ldots + \frac{A^{(1)}_{2p_1-1} + B^{(1)}_{2p_1-1} x}{1 + 2a_1 x \cos(2p-1)\lambda_1 + a_1^2 x^2}$$

$$+ \frac{A_1^{(2)} + B_1^{(2)} x}{1 + 2a_2 x \cos\lambda_2 + a_2^2 x^2} + \frac{A_3^{(2)} + B_3^{(2)} x}{1 + 2a_2 x \cos 3\lambda_2 + a_2^2 x^2} + \ldots + \frac{A^{(2)}_{2p_2-1} + B^{(2)}_{2p_2-1} x}{1 + 2a_2 x \cos(2p_2-1)\lambda_1 + a_1^2 x^2}$$

$$+ \quad \ldots \quad + \quad \ldots \quad + \ldots + \quad \ldots$$

$$+ \frac{A_1^{(n-1)} + B_1^{(n-1)} x}{1 + 2a_{n-1} x \cos\lambda_{n-1} + a^2_{n-1} x^2} + \frac{A_3^{(n-1)} + B_3^{(n-1)} x}{1 + 2a_{n-1} x \cos 3\lambda_{n-1} + a^2_{n-1} x^2} + \ldots + \frac{A^{(n-1)}_{2p_{n-1}-1} + B^{(n-1)}_{2p_{n-1}-1} x}{1 + 2a_{n-1} x \cos(2p_{n-1}-1)\lambda_{n-1} + a^2_{n-1} x^2}$$

Setzt man ferner der Einfachheit wegen:

$$\varphi(x) = \left(1 + a_0^{2p_0} x^{2p_0}\right) \left(1 + a_1^{2p_1} x^{2p_1}\right) \left(1 + a_1^{2p_2} x^{2p_2}\right) \ldots \ldots \left(1 + a_{n-1}^{2p_{n-1}} x^{2p_{n-1}}\right)$$

so kann voriger Gleichung auch folgende Gestalt gegeben werden:

$$\begin{aligned} X^m = & \\ = & U_1^{(0)} \varphi(x) + U_3^{(0)} \varphi(x) + U_5^{(0)} \varphi(x) + \ldots + U^{(0)}_{2p_0 - 1} \varphi(x) \\ & + U_1^{(1)} \varphi(x) + U_3^{(1)} \varphi(x) + U_5^{(1)} \varphi(x) + \ldots + U^{(1)}_{2p_1 - 1} \varphi(x) \\ & + U_1^{(2)} \varphi(x) + U_3^{(2)} \varphi(x) + U_5^{(2)} \varphi(x) + \ldots + U^{(2)}_{2p_2 - 1} \varphi(x) \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + 1U_1^{(n-1)} \varphi(x) + U_3^{(n-1)} \varphi(x) + U_5^{(n-1)} \varphi(x) + \ldots + U^{(n-1)}_{2p_{n-1} - 1} \varphi(x) \end{aligned}$$

wo allgemein $U^{(k)}_{2s_k - 1}$ statt

$$\frac{A^{(k)}_{2s_k - 1} + B^{(k)}_{2s_k - 1} x}{1 + 2 a_k x \cos(2 s_k - 1) \lambda_k + a^2_k x^2}$$

gesetzt worden.

Wenn in dieser in Bezug auf x indentischen Gleichung die Funktion $\varphi(x)$ für irgend einen Werth von x gleich Null wird, so verschwinden sämmtliche Ausdrücke rechts vom (=), mit Ausnahme eines einzigen, der in $\frac{0}{0}$ übergeht; denn irgend eine Wurzel eines Binoms der Funktion $\varphi(x)$ z. B.

$$1 + a_k^{2p_k} x^{2p_k} = 0 \qquad (\alpha)$$

ist zur gleichen Zeit Wurzel irgend einer der trinomischen Faktoren desselben Binom's, z. B. von

$$1 + 1\, a_k\, \alpha \cos(2 s_k - 1) \lambda_k + a^2_k x^2 = 0 \qquad (\beta)$$

Wird durch $Q^{(k)}_{2s_k - 1}$ das in $\frac{0}{0}$ übergehende Glied bezeichnet, so ist:

$$Q^{(k)}_{2s_k - 1} = \frac{\varphi(x)}{1 + 2 a_k x \cos(2 s_k - 1) \lambda_k + a^2_k x^2} \cdot \left(A^{(k)}_{2s_k - 1} + B^{(k)}_{2s_k - 1} x\right)$$

und wenn daher w eine den Gleichungen (α) und (β) gemeinschaftlich zukommende Wurzel vorstellt, und

$$\psi_k(x) = \frac{\left(1+a_0^{2p_0}x^{2p_0}\right)\left(1+a_1^{2p_1}x^{2p_1}\right)\left(1+a_2^{2p_2}x^{2p_2}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\left(1+a_{n-1}^{2p_{n-1}}x^{2p_{n-1}}\right)}{1+2a_k x\cos(2s_k-1)\lambda_k+a^2{}_k x^2}$$

gesetzt wird, so hat man:

$$\psi_k(w) = \frac{2a_k^{2p_k}p_k}{2}\,\frac{R_k\,w^{2p_k-1}}{a_k\cos(2s_k-1)\lambda_k+a^2{}_k w}$$

und da beim Statthaben von w als Wurzel der Gleichung (β) auch $\frac{1}{a^2{}_k w}$ eine Wurzel derselben Gleichung (β) ist, so hat man ferner:

$$\psi_k\left(\frac{1}{a^2{}_k w}\right) = \frac{2a_k^{2p_k}p_k}{2}\,\frac{S_k\left(\frac{1}{a^2{}_k w}\right)^{2p_k-1}}{a_k\cos(2s_k-1)\lambda_k+\frac{1}{w}}$$

wo

$$R_k = \left(1+a_0^{2p}\,w^{2p_0}\right)\left(1+a_1^{2p_1}w^{2p_1}\right)\left(1+a_2^{2p_2}w^{2p_2}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\left(1+a_{n-1}^{2p_{n-1}}\,w^{2p_{n-1}}\right)$$

$$S_h = \left(1+a_0^{2p_0}[a^2{}_k w]^{-2p_0}\right)\left(1+a_1^{2p_1}[a^2{}_k w]^{-2p_1}\right)\cdot\cdot\cdot\left(1+a_{n-1}^{2p_{n-1}}[a^2{}_k w]^{-2p_{n-1}}\right)$$

gesetzt werden, jedoch mit der Bemerkung, dass in jeder Binomenfolge rechts vom $(=)$ immer das Binom

$$1+a_k^{2p_k}\,w^{2p_k}$$

$$\text{und } 1+a_k^{2p_k}\,[a^2{}_k\,w]^{-2p_k}$$

als fehlend betrachtet werden muss.

Man hat demnach zur Bestimmung der Grössen $A^{(k)}_{2s_k-1}$, $B^{(k)}_{2s_k-1}$ die zwei Gleichungen:

$$w^m = \left(A^{(k)}_{2s_k-1}+B^{(k)}_{2s_k-1}\,w\right)\frac{2a_k^{2p_k}p_k}{2a_k}\,\frac{R_k\,w^{2p_k-1}}{\cos(2s_k-1)\lambda_k+a_k w}$$

$$\left(\frac{1}{a^2{}_k\,w}\right)^m = \left(A^{(k)}_{2s_k-1}+B^{(k)}_{2s_k-1}\,\frac{1}{a^2{}_k\,w}\right)\frac{2a_k^{2p_k}p_k}{2a_k}\,\frac{S_k\left(\frac{1}{a^2{}_k\,w}\right)^{2p_k-1}}{\cos(2s_k-1)\lambda_k+\frac{1}{a_k w}}$$

Nun ergiebt sich für w aus der Gleichung (β):

$$w = - a_k^{-1} \left\{ \cos(2s_k - 1)\lambda_k - \sqrt{-1}\sin(2s_k - 1)\lambda \right\}$$

$$\frac{1}{a^2 w} = - a_k^{-1} \left\{ \cos(2s_k - 1)\lambda_k + \sqrt{-1}\sin(2s_k - 1)\lambda_k \right\} \qquad (\gamma)$$

und aus der Gleichung (α):

$$a^{2p_k}\, w^{2p_k} = -1, \quad \frac{1}{a_k^{2p_k}\, w^{2p_k}} = -1$$

demnach

$$w^m = - \frac{2p_k}{2a_k}\left(A^{(k)}_{2s_k-1} + B^{(k)}_{2s_k-1}\, w\right) \frac{R_k\, w^{-1}}{\cos(2s_k-1)\lambda_k + a_k w}$$

$$\left(\frac{1}{a^2 w}\right)^m = - \frac{2p_k}{2a_k}\left(A^{(k)}_{2s_k-1} + B^{(k)}_{2s_k-1}\frac{1}{aw}\right) \frac{a^2{}_k\, S_k\, w}{\cos(2s_k-1)\lambda_k + \frac{1}{a_k w}}$$

also

$$A^{(k)}_{2s_k-1} + B^{(k)}_{2s_k-1}\, w = - \frac{2a_k}{2p_k}\, \frac{w^{m+1}\left[\cos(2s_k-1)\lambda_k + a_k w\right]}{R_k}$$

$$A^{(k)}_{2s_k-1} + B^{(k)}_{2s_k-1}\frac{1}{a^2 w} = - \frac{2a^3{}_k}{2p_k}\, \frac{(a^2 w)^{-(m+1)}\left[\cos(2s_k-1)\lambda_k + \frac{1}{a_k w}\right]}{a^2{}_k\, S_k}$$

$$A^{(k)}_{2s_k-1}\left(w - \frac{1}{a^2 w}\right) = \frac{2a_k}{2p_k\, a^2{}_k}\left\{ \frac{w^m\left[\cos(2s_k-1)\lambda_k + a_k w\right]}{R_k} - \frac{(a^2 w)^{-m}\left[\cos(2s_k-1)\lambda_k + \frac{1}{a_k w}\right]}{S_k} \right\}$$

$$B^{(k)}_{2s_k-1}\left(w - \frac{1}{a^2 w}\right) = \frac{2a^3{}_k}{2p_k}\left\{ \frac{(a^2 w)^{-(m+1)}\left[\cos(2s_k-1)\lambda_k + \frac{1}{a_k w}\right]}{a^2{}_k\, S_k} - \frac{w^{m+1}\left[\cos(2s_k-1)\lambda_k + a_k w\right]}{a^2{}_k\, R_k} \right\}$$

und nun findet man mit Berücksichtigung der Gleichungen (γ) nach einigen Reduktionen

$$A^{(k)}_{2s_k-1} = \frac{(-1)^m}{2a_k^m\, p_k}\left\{ (R_k + S_k)\cos m(2s_k-1)\lambda_k + (R_k - S_k)\sqrt{-1}\sin m(2s_k-1)\lambda_k \right\}\frac{1}{R_k\, S_k} \qquad \text{II.}$$

$$B^{(k)}_{2s_k-1} = a_k\, \frac{(-1)^m}{2a_k^m\, p_k}\left\{ (R_k + S_k)\cos(m+1)(2s_k-1)\lambda_k + (R_k - S_k)\sqrt{-1}\sin(m+2)(2s_k-1)\lambda_k \right\}\frac{1}{R_k\, S_k}$$

Nach den gewonnenen Gleichungen II., sind nun sämmtliche unbestimmte von x independente Grössen in Gleichungen I bestimmt, und es geht somit die Gleichung I, in nachstehende Gleichung über:

$$\frac{X^m}{\left(1+[a_0 x]^{2p_0}\right)\left(1+[a_1 x]^{2p_1}\right)\left(1+[a_2 x]^{2p_2}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;\left(1+[a_{n-1} x]^{2p_{n-1}}\right)} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2\,a_0^m\,p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{(R_0+S_0)\left[\cos m(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0 x\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}\right]}{1+2a_0 x\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0^2x^2}\right\}\frac{1}{R_0\,S_0}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2\,a_1^m p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{(R_1+S_1)\left[\cos m(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1 x\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}\right]}{1+2a_1 x\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1^2x^2}\right\}\frac{1}{R_1\,S_1}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2\,a_2^m p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{(R_2+S_2)\left[\cos m(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2 x\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}\right]}{1+2a_2 x\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2^2x^2}\right\}\frac{1}{R_2\,S_2}$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2a_{n-1}^m\,p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{(R_{n-1}+S_{n-1})\left[\cos m(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}x\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}\right]}{1+2a_{n-1}x\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}^2x^2}\right\}\frac{1}{R_{n-1}S_{n-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2\,a_0^m p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{\sin m(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0 x\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}{1+2a_0 x\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0^2x^2}\right\}\frac{R_0-S_0}{R_0\,S_0}\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2\,a^m p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{\sin m(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1 x\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}{1+2a_1 x\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1^2x^2}\right\}\frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1}\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2\,a_2^m p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{\sin m(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2 x\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}}{1+2a_2 x\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2^2x^2}\right\}\frac{R_2-S_2}{R_2\,S_2}\sqrt{-1}$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_{n-1}^m\,p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{\sin m\,(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}\,x\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}{1+2a_{n-1}\,x\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}^2\,x^2}\right\}\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sqrt{-1}$$

Um nun zur Integration der in der Aufgabe gegebenen Differenzialfunktion zu gelangen, hat man es nach der letzten Gleichung III., mit der Bestimmung folgender zwei Integrationen zu thun:

$$\int\frac{A\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2},\quad\int\frac{B\,x\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

wo A und B von x independende Grössen bezeichnen.

Nun findet man dass

$$\int\frac{A\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{2A}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\operatorname{arctang}\frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}+C$$

$$\int\frac{B\,x\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{B}{2\gamma}\log(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$$

$$-\frac{B\beta}{\gamma\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\operatorname{arctang}\frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}+C$$

demnach hat man:

$$\int\frac{\left(\cos m\,(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a_k\,x\cos(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}\right)}{1+2a_k\,x\cos(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a_k^2\,x^2}\,dx=$$

$$=\frac{\cos(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_h}}{2a_k}\log\left(1+2a_k\,x\cos(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a_k^2\,x^2\right)$$

$$+\frac{\sin(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}}{a_k}\operatorname{arctang}\frac{\cos(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a_k\,x}{\sin(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}}+C$$

und ebenso findet man:

$$\sqrt{-1}\int\frac{\left(\sin m(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a_k x\sin(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}\right)}{1+2a_k x\cos(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a^2{}_k} =$$

$$=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\sin(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}}{2a_k}\log\left(1+2a_k x\cos(2s_k-b)\frac{\pi}{2p_k}+a^2{}_k x^2\right) \\ -\dfrac{\cos(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}}{a_k}\operatorname{arctang}\dfrac{\cos(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a_k x}{\sin(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}}\end{matrix}\right\}\sqrt{-1} + C$$

Multiplizirt man sonach die Gleichung III. mit dx und integrirt nach derselben Grösse x, so ergiebt sich folgende Integralgleichung:

$$\int\frac{x^m\,dx}{\left(1+[a_0 x]^{2p_0}\right)\left(1+[a_0 x]^{2p_1}\right)\left(1+[a_2 x]^{2p_0}\right)\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \left(1+[a_{n-1}x]^{2p_{n-1}}\right)} = \qquad \text{(IV.)}$$

$$=\frac{(-1)^m}{4a_0^{m+1}p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{(R_0+S_0)}{R_0 S_0}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+\frac{R_0-S_0}{R_0 S_0}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_0-1)\right\}.$$
$$.\ \log\left(1+2a_0 x\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p^0}+a_0{}^2x^2\right)$$

$$+\frac{(-1)^m}{4a_1^{m+1}p_0}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{(R_1+S_1)}{R_1 S_1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_0}+\frac{R_1-S_1}{R_1 S_1}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}\right\}$$
$$.\ \log\left(1+2a_1 x\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_2}+a^2{}_1x^2\right)$$

$$+\frac{(-1)^m}{4a_2^{m+1}p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2 S_2}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+\frac{R_2-S_2}{R_2 S_2}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}\right\}.$$
$$.\ \log\left(1+2a_2 x\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_1}+a^2{}_2x^2\right)$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\frac{(-1)^m}{4a_{n-1}^{m+1}p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_2}+\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}\right\}$$
$$.\ \log\left(1+2a_{n-1}x\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a^2_{n-1}x^2\right)$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_0^{m+1}p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}-\frac{R_0-S_0}{R_0\,S_0}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}\right\}$$

$$.\ \text{arctang}\,\frac{\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0x}{\sin(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_1^{m+1}p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_0}-\frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}\right\}$$

$$.\ \text{arcrang}\,\frac{\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1x}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_2^{m+1}p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}-\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}\right\}$$

$$.\ \text{arctang}\,\frac{\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2x}{\sin(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_{n-1}^{m+1}p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}-\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}\right\}$$

$$.\ \text{arctang}\,\frac{\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}x}{\sin(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}+C\ ^{*})$$

Geht in der Gleichung IV. x in —x über, so erhält man folgende Gleichung:

$$\int\frac{x^m\,dx}{\left(1+[a_0x]^{2p_0}\right)\left(1+[a_1x]^{2p_1}\right)\left(1+[a_2x]^{2p_2}\right)\ .\ .\ .\ .\ \left(1+[a_{n-1}x]^{2p_{n-1}}\right)}= \qquad \text{(V.)}$$

---

*) Bemerkung. Diese Gleichung stimmt für den speziellen Fall

$$\int\frac{x^m\,dx}{\left(1+a^{2p}x^{2p}\right)\left(1+b^{2q}x^{2q}\right)}$$

mit der von Herrn Professor Raabe gerechneten vollkommen überein, die ich von ihm schriftlich mitgetheilt, bei der Hand habe.

$$= \frac{-1}{4a_0^{m+1}\,p_0} \sum_{s_0=1}^{s_0=p_0} \left\{ \frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0} \cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0} + \frac{R_0-S_0}{R_0\,S^0} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0} \right\}$$
$$.\ \log\left(1 - 2a_0 x \cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0} + a_0^2 x^2\right)$$

$$+ \frac{-1}{4a_1^{m+1}\,p_1} \sum_{s_1=1}^{s_1=p_1} \left\{ \frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1} \cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1} + \frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1} \right\}$$
$$.\ \log\left(1 - 2a_1 x \cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1} + a_1^2 x^2\right)$$

$$+ \frac{-1}{4a_2^{m+1}\,p_2} \sum_{s_2=1}^{s_2=p_2} \left\{ \frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2} \cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2} + \frac{R_2-S_2}{R_2\,S_2} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2} \right\}$$
$$.\ \log\left(1 - 2a_2 x \cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2} + a_2^2 x\right)$$
$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{-1}{4a_{n-1}^{m+1}\,p_{n-1}} \sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}} \left\{ \frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}} \cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} + \frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} \right\}$$
$$.\ \log\left(1 - 2a_{n-1} x \cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} + a_{n11}^2 x^2\right)$$

$$+ \frac{1}{2a_0^{m+1}\,p_0} \sum_{s_0=1}^{s_0=p_0} \left\{ \frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0} \sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0} - \frac{R_0-S^0}{R_0\,S_0} \sqrt{-1} \cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0} \right\}$$
$$.\ \operatorname{arctang} \frac{a_0 x - \cos(2_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_0}}$$

$$+ \frac{1}{2a_1^{m+1}\,p_1} \sum_{s_1=1}^{s_1=p_1} \left\{ \frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1} \sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1} - \frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1} \sqrt{-1} \cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1} \right\}$$
$$.\ \operatorname{arctang} \frac{a_1 x - \cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}$$

$$+ \frac{1}{2a_2^{m+1}\,p_2} \sum_{s_2=1}^{s_2=p_2} \left\{ \frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2} \sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2} - \frac{R_2-S_2}{R_2\,S_2} \sqrt{-1} \cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2} \right\}$$

$$\cdot \operatorname{arctang} \frac{a_2 x - \cos(2s_2 - 1)\frac{\pi}{2p_2}}{\sin(2s_2 - 1)\frac{\pi}{2p_2}}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{1}{2a_{n-1}^{m+1}\, p_{n-1}} \sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}} \left\{ \frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\, S_{n-1}} \sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} - \frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\, S_{n-1}} \sqrt{-1} \cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} \right\} \cdot$$

$$\operatorname{arctang} \frac{a_{n-1} x - \cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}{\sin(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}} + C$$

Geht in der Gleichung V m in 2 m + 1 über, so erhält man folgende Integralgleichung:

$$\int \frac{x^{2m+1}\, dx}{\left(1+(a_0 x)^{2p_0}\right)\left(1+(a_1 x)^{2p_0}\right) 1+(a_2 x)^{2p_0}\big) \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; \left(1+(a_{n-1} x)^{2p_{n-1}}\right)} =$$

$$= - \frac{1}{4a_0^{2m+2}\, p_0} \sum_{s_0=1}^{s_0=p_0} \left\{ \frac{R_0+S_0}{R_0\, S_0} \cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p_0} + \frac{R_0-S_0}{R_0\, S_0} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p_0} \right\}$$

$$\cdot \log\left(1 - 2a_0 x \cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0} + a_0^2 x^2\right)$$

$$- \frac{1}{4a_1^{2m+1}\, p_1} \sum_{s_1=1}^{s_1=p_1} \left\{ \frac{R_1+S_1}{R_1\, S_1} \cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{p_1} + \frac{R_1-S_1}{R^1\, S_1} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{p_1} \right\}$$

$$\cdot \log\left(1 - 2a_1 x \cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1} + a_1^2 x^2\right)$$

$$- \frac{1}{2a_2^{2m+2}\, p_2} \sum_{s_2=1}^{s_2=p_2} \left\{ \frac{R_2+S_2}{R_2\, S_2} \cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{p_2} + \frac{R_2-S_2}{R_2\, S_2} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{p_2} \right\}$$

$$\cdot \log\left(1 - 2a_2 x \cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2} + a_2^2 x_2\right)$$

$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$- \frac{1}{4a_{n-1}^{2m+2}\, p_{n-1}} \sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}} \left\{ \frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\, S_{n-1}} \cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{p_{n-1}} + \frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\, S_{n-1}} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{p_{n-1}} \right\}$$

$$\cdot \log\left(1 - 2a_{n-1} x \cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} + a_{n-1}^2 x^2\right)$$

$$+\frac{1}{2a_0^{2m+1}\,p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p_0}-\frac{R_0-S_0}{R_0\,S_0}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p_0}\right\}$$

$$.\ \mathrm{arctang}\,\frac{a_0x-\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}{\sin(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}$$

$$+\frac{1}{2a_1^{2m+2}\,p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{p_1}-\frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{}{p_0}\right\}.$$

$$.\ \mathrm{arctang}\,\frac{a_1x-\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_1}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}$$

$$+\frac{1}{2a_2^{2m+2}\,p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{p_2}-\frac{R_2-S_2}{R_2\,S_2}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{p_2}\right\}$$

$$.\ \mathrm{arctang}\,\frac{c_2x-\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}}{\sin(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}}$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\frac{1}{2a_{n-1}^{2m+2}\,p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{p_{n-1}}-\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{p_{n-1}}\right\}$$

$$.\ \mathrm{arctang}\,\frac{a_{n-1}x-\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}{\sin(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}+C$$

Geht nun in dieser Gleichung a_k^2 in a_k und x^2 in x, also dx in $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ über, so hat man mit Berücksichtigung, dass p_k und q_k vertauscht werden können, zur Bestimmung vorgelegten Integrals, nachstehende Gleichung:

$$\int\frac{x^m\,dx}{(1+(a_0x)^{q_0})\,(1+(a_1x)^{q_1})\,(1+(a_2x)^{q_2})\ .\ .\ .\ .\ (1+(a_{n-}\ x^{p_{n-1}})}=$$

$$=-\frac{1}{2a_0^{m+1}\,p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{q_0}+\frac{R_0-S_0}{R_0\,S_0}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{q_0}\right\}$$

$$.\ \log(1-2\sqrt{a_0x}\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2q_0}+a_0x)$$

$$-\frac{1}{2a_1^{m+1}\,p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q_1}+\frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q_1}\right\}$$

$$.\ \log\left(1-2\sqrt{a_1x}\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2q_1}+a_1x\right)$$

$$-\frac{1}{2a_2^{m+1}\,p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{q_2}+\frac{R_2-S_2}{R_2\,S_2}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{q_2}\right\}$$

$$.\ \log\left(1-2\sqrt{a_2x}\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2q_2}+a_2x\right)$$

$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{2a_{n-1}^{m+1}\,p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{q_{n-1}}+\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{q_{n-1}}\right\}$$

$$.\ \log\left(1-2\sqrt{a_{n-1}x}\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2q_{n-1}}+a_{n-1}x\right)$$

$$+\frac{1}{a_0^{m+1}\,q_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{q_0}-\frac{R_0-S_0}{R_0\,S_0}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{q_0}\right\}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{a_0x}-\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2q_0}}{\sin(2s_0-1)\frac{\pi}{2q_0}}$$

$$+\frac{1}{a_1^{m+1}\,p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q_1}-\frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q_1}\right\}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{a_1x}-\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2q_1}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2q_1}}$$

$$+\frac{1}{a_2^{m+1}\,p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{q_2}-\frac{R_2-S_2}{R_2\,S_2}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{q_2}\right\}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{a_2x}-\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2q_2}}{\sin(2s_2-1)\frac{\pi}{2q_2}}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{a_{n-1}^{m+1}\,p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{q_{n-1}}-\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{q_{n-1}}\right\}$$

$$.\ \operatorname{arctang}\frac{\sqrt{a_{n-1}x}-\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2q_{n-1}}}{\sin(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2q_{n-1}}}+C \qquad \text{(VIII)}$$

welches zu finden war.

Als spezieller Fall führe ich die eine Integralgleichung an, nämlich wenn:

$$q_0 = p,\ q_1 = q,\ q_2 = q_3 = q_4 = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_{n-1} = 0$$

und $a_0 = a$, $a_1 = b$ wird; denn alsdann giebt die Gleichung (VII.) nach einigen gemachten Reduktionen folgende unbestimmte Integralgleichung:

$$\int \frac{x^m\,dx}{(1+a^p x^p)(1+b^q x^q)} =$$

$$= \frac{-1}{pa^{m+1}} \sum_{s_0=1}^{s_0=p} \frac{\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p} + \left(\frac{b}{a}\right)^q \cos(q-m-1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p}}{1+2\left(\frac{b}{a}\right)^q \cos(2s_0-1)\frac{q}{p}\pi + \left(\frac{b}{a}\right)^{2q}} \log\left(1-2\sqrt{ax}\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p}+ax\right)$$

$$- \frac{1}{qb^{m+1}} \sum_{s_1=1}^{s_1=q} \frac{\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q} + \left(\frac{a}{b}\right)^p \cos(p-m-1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q}}{1+2\left(\frac{a}{b}\right)^p \cos(2s_1-1)\frac{p}{q}\pi + \left(\frac{a}{b}\right)^{2p}} \log\left(1-2\sqrt{bx}\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2q}+bx\right)$$

$$+ \frac{2}{pa^{m+1}} \sum_{s_0=1}^{s_0=p} \frac{\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p} - \left(\frac{b}{a}\right)^q \sin(q-m-1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p}}{1+2\left(\frac{b}{a}\right)^q \cos(2s_0-1)\frac{q}{p}\pi + \left(\frac{b}{a}\right)^{2q}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{ax}-\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p}}{\sin(2s_0-1)\frac{\pi}{2p}}$$

$$+ \frac{2}{qb^{m+1}} \sum_{s_1=1}^{s_1=q} \frac{\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q} - \left(\frac{a}{b}\right)^p \sin(p-m-1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q}}{1+2\left(\frac{a}{b}\right)^p \cos(2s_1-1)\frac{p}{q}\pi + \left(\frac{a}{b}\right)^{2p}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{bx}-\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2q}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2q}} + C$$

Bei der ganzen Durchführung des in Rede stehenden unbestimmten Integrals war es auf die Erhaltung des unbestimmten Integrals

$$\int \frac{x^m\,dx}{(1+a^p x^p)^n}$$

abgesehen, was nun aus Gleichung VII leicht ist. Die nöthigen Reduktionen zur Verifikation dieses Integrals, wenn man es zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirt, mit den gefundenen Resultaten des gleichen Integrals von Euler, konnte ich aus Mangel an Zeit unmöglich hier mehr anbringen.