

SUR
LES INÉGALITÉS DU MOYEN MOUVEMENT D'URANUS
DUES A
L'ACTION PERTURBATRICE DE NEPTUNE.

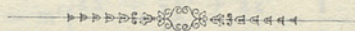
DISSERTATION
PRÉSENTÉE
A LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE

DE
L'UNIVERSITÉ DE ZURICH

POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR EN PHILOSOPHIE

PAR
G. J. SIDLER
D'UNTERSTRASS PRÈS ZURICH

13 SEPTEMBRE 1854.



ZURICH
IMPRIMERIE DE ZÜRCHER ET FURRER.
1854.

SUR LES

INÉGALITÉS DU MOYEN MOUVEMENT D'URANUS

DUES A L'ACTION PERTURBATRICE

DE NEPTUNE.

Soit M la masse du soleil, soient m, m', m'' etc. les masses des différentes planètes du système solaire considérées comme autant de points, soient enfin x, y, z les coordonnées du corps m par rapport à trois axes de coordonnées rectangles passant par le centre du soleil, x', y', z' celles du corps m' , et ainsi du reste.

Les équations différentielles du mouvement relatif du corps m autour du soleil seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(M + m)x}{r^3} = - \frac{dR}{dx}$$

$$1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(M + m)y}{r^3} = - \frac{dR}{dy}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(M + m)z}{r^3} = - \frac{dR}{dz}$$

en posant

$$R = m' \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \frac{1}{\rho_{0.1}} \right) + \\ + m'' \left(\frac{xx'' + yy'' + zz''}{r''^3} - \frac{1}{\rho_{0.2}} \right) + \text{etc.}$$

$$r^{(p)} = \sqrt{x^{(p)2} + y^{(p)2} + z^{(p)2}}$$

$$\rho_{(p,q)} = \sqrt{(x^{(p)} - x^{(q)})^2 + (y^{(p)} - y^{(q)})^2 + (z^{(p)} - z^{(q)})^2}$$

Si dans les équations (1) on change les quantités m, x, y, z successivement en $m'x'y'z'$; m'', x'', y'', z'' etc. et réciproquement, on aura les équations du mouvement des corps m', m'' etc. autour de M .

En négligeant les seconds membres des équations (1) ou les actions troublantes des planètes, on tombe sur le mouvement elliptique selon les lois de Kepler et l'on trouve les valeurs de x, y, z en fonction du temps et de six constantes de l'intégration qu'on appelle les éléments elliptiques de la planète. Nous les représentons par :

a . . . le demi-grand-axe auquel est lié le moyen mouvement n de la planète par la relation $n^2 a^3 = M + m$,

e . . . l'excentricité de l'orbite,

ε . . . la longitude moyenne de l'époque, comptée dans l'orbite à partir du Ω ,

ω . . . la longitude du périhélie comptée dans l'orbite à partir du Ω ,

α . . . la longitude du Ω ,

γ . . . l'inclinaison de l'orbite.

Si maintenant on tient compte des forces perturbatrices en conservant, d'après le principe de la variation des constantes arbitraires, la forme de la première solution, mais en rendant variables les constantes arbitraires que l'on assujettit encore aux conditions que les valeurs de $\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} \frac{dx'}{dt}$ etc. conservent la même forme que si les constantes n'y variaient pas, on trouve les équations

$$\frac{da}{dt} = - \frac{2}{na} \frac{dR}{d\varepsilon}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1 - \sqrt{1 - e^2}) \sqrt{1 - e^2}}{n a^2 e} \frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a^2 e} \frac{dR}{d\omega}$$

$$2) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{na} \frac{dR}{da} - \frac{(1 - \sqrt{1 - e^2}) \sqrt{1 - e^2}}{n a^2 e} \frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{\cos \gamma}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \sin \gamma} \frac{dR}{d\gamma}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\gamma} \frac{dR}{d\gamma}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{dR}{de} + \frac{\cos\gamma}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\gamma} \frac{dR}{d\gamma}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = - \frac{\cos\gamma}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\gamma} \left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\omega} \right) + \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\gamma} \frac{dR}{d\alpha}$$

et des équations analogues, en γ changeant les quantités $a, n, e, \varepsilon, \alpha, \omega, \gamma$ successivement en $a', n', \varepsilon', \alpha', \omega', \gamma'$ etc., a'', n'' etc., et réciproquement

Or si l'on substitue dans la fonction R que nous appelons la fonction perturbatrice les valeurs des coordonnées x, y, z etc. en fonction des éléments elliptiques et du temps, elle sera développable en série de la forme

$$R = A + \Sigma P_{\sin}^{\cos} (i\xi + i^n \xi^n)$$

ξ, ξ' etc. étant les anomalies moyennes des planètes m, m' etc. données par les équations

$$\xi = \int n dt + \varepsilon - \omega$$

$$\xi' = \int n' dt + \varepsilon' - \omega'$$

et ainsi de suite, i, i^n étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et A, B des fonctions des éléments qui ne contiennent pas le temps explicitement et qui sont de plus indépendantes des éléments $\varepsilon, \varepsilon'$ etc.

Il faut remarquer qu'en prenant la dérivée partielle de R , par rapport à a , pour former l'équation qui donne $\frac{d\varepsilon}{dt}$, on doit traiter la quantité n qui figure dans ξ comme indépendante de a .

Cela posé, on aura en vertu des équations (2) en désignant par p un élément quelconque

$$2^o) \quad \frac{dp}{dt} = H + \Sigma L_{\sin}^{\cos} (i\xi + i^n \xi^n)$$

H et L étant, comme les A et les B , des fonctions des

éléments excepté de ε , ε' etc. et qui ne contiennent pas le temps explicitement.

Si dans une première approximation on remplace dans les seconds membres des équations (2') les éléments par leurs valeurs à une époque donnée, H et L deviennent des constantes; on a de plus $\zeta = nt + \varepsilon - \omega$ etc. et l'on trouve par des simples quadratures

$$3) \quad p = \text{Const.} + Ht + \sum \frac{L}{i n + i v_n(n)} \frac{\sin}{\cos} (i \zeta + i v \zeta^{(n)})$$

Nous avons donc à distinguer deux espèces d'inégalités des éléments, savoir des inégalités séculaires qui dépendent de la partie non périodique A de la fonction perturbatrice et qui se présentent à la première approximation comme croissantes proportionnellement au temps, et des inégalités périodiques dépendantes des parties périodiques de la fonction perturbatrice.

Quant aux inégalités périodiques, cette première approximation suffit aux besoins de l'astronomie, en sorte qu'on peut calculer séparément les inégalités périodiques des éléments d'une planète, dues à l'action troublante d'une autre planète, en ne considérant que ces deux planètes à-la-fois ou faisant abstraction de toutes les autres.

Mais quant aux inégalités séculaires, cette première approximation ne les donne que pour un temps fort restreint avant ou après l'époque, et pour les obtenir pour un intervalle de temps considérable, il est nécessaire, en négligeant les parties périodiques de la fonction perturbatrice, de traiter les équations

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= H \\ \frac{dp'}{dt} &= H' \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

comme autant d'équations différentielles simultanées. Lagrange a réduit ces équations à un système d'équations

linéaires à coefficients constants, et le calcul numérique montre que les inégalités séculaires, aux moins des excentricités et des inclinaisons, sont reserrées entre des limites étroites, mais qu'elles dépendent des périodes, dont la durée est fort considérable. (v. Leverrier, Mémoire sur les variations séculaires des éléments des sept planètes principales. 1842.)

Or, la valeur de $\frac{da}{dt}$ donnée par les équations (2) montre que le demi-grand-axe et par suite le moyen mouvement n'ont pas d'inégalités séculaires. Donc, si nous voulons chercher séparément l'action troublante de Neptune sur Uranus, ce ne sont que les inégalités du moyen mouvement et l'influence de ces inégalités sur la longitude de l'astre, que nous considérerons.

L'équation (3) montre, qu'une inégalité qui dépend d'un certain argument $i\xi + i'\xi'$ est en général d'autant plus sensible que la quantité $in + i'n'$ est plus petite, en même temps que la durée de sa période devient plus longue. De l'autre côté, il arrive que le coefficient L d'un terme à l'argument $i\xi + i'\xi'$ est d'autant plus petit que le sont les deux nombres i et i' .

Donc, si les moyens mouvements n et n' de deux planètes sont entre eux à-peu-près comme deux petits nombres entiers i' et i , en sorte que le nombre $in - i'n'$ soit fort petit, les inégalités des éléments de ces deux planètes qui dépendent de l'argument $i\xi - i'\xi'$ peuvent être très sensibles, et d'autant plus que les deux nombres i et i' sont plus petits. C'est surtout dans la longitude que ces inégalités seront prépondérantes, car là elles dépendent de deux intégrations et ont conséquemment le carré $(in - i'n')^2$ pour diviseur.

Or, le moyen mouvement d'Uranus est à-peu-près égal à deux fois celui de Neptune, en effet on a (v. Annuaire du bureau des longitudes 1854.)

moyen mouvement diurne d'Uranus
 $n = 42''$, 233.

moyen mouvement diurne de Neptune
 $n' = 21''$, 554.

Il en résulte une inégalité fort sensible dans le moyen mouvement d'Uranus, qui dépend de l'argument $\xi - 2\xi'$ et dont la détermination formera l'objet principal des recherches suivantes.

On a $2n' - n = 0''$, 875. La période de l'inégalité indiquée sera donc

$$\frac{360^\circ}{365,25 \times 0'', 875} = 4055 \text{ années juliennes.}$$

Or, en regardant les excentricités et les inclinaisons comme des quantités très petites du premier ordre et développant la fonction perturbatrice suivant les puissances ascendantes de ces quantités, les termes de cette fonction qui dépendent de l'argument $i'\xi' - i\xi$ sont de l'ordre $i' - i + 2k$, k étant zéro ou un nombre entier positif (Méc. céleste, livre II. §. 48.). Donc, les termes, argument $2\xi' - \xi$, sont de l'ordre impair par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et il arrive que cet argument se trouve déjà parmi les termes du premier ordre. Donc, en ne tenant compte que de la première puissance des excentricités et des inclinaisons, nous sommes assurés que les termes négligés qui dépendent de ce même argument $2\xi' - \xi$ sont, par rapport à ceux dont nous tenons compte, au moins du second ordre de petitesse.

Mais les excentricités d'Uranus et de Neptune étant de petites quantités de $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{100}$ environ, il faut voir, si la petitesse du diviseur $2n' - n$, n'est pas compensée par la petitesse de ces facteurs e et e' qui affectent les inégalités, argument $2\xi' - \xi$, en sorte que les termes de

la fonction perturbatrice, qui n'ont ni les excentricités ni les inclinaisons en facteur, ne donnent naissance à des inégalités périodiques, dont l'amplitude soit au moins aussi grande que celle des inégalités qui dépendent de l'argument $\xi - 2\xi$. En effet on se convaincra aisément que les termes périodiques de la fonction perturbatrice, qui sont de l'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, dépendent de l'argument $\xi - \xi'$ et de ses multiples. Or, $\frac{2n' - n}{n - n'}$ étant à-peu-près $\frac{1}{20}$, ce qui est justement la valeur de l'excentricité d'Uranus, il se pourrait bien que, parmi les inégalités périodiques des éléments d'Uranus qui ont pour diviseur $n - n'$ à la première puissance, telles, qui sont de l'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, eussent à-peu-près la même amplitude que celles qui dépendent de l'argument $\xi - 2\xi'$. Mais lorsqu'en intégrant on passe des inégalités du moyen mouvement aux inégalités de la longitude, celles de l'argument $\xi - 2\xi'$ seront de nouveau affectées d'un diviseur qui est 20 fois plus petit que celui des inégalités de l'ordre zéro, en sorte qu'il semble probable que dans la longitude l'amplitude des inégalités, argument $2\xi' - \xi$, soit 20 fois plus grande que celle des inégalités de l'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Néanmoins, ces discussions préliminaires ayant besoin d'être confirmées par le calcul, nous tiendrons encore compte des termes de la fonction perturbatrice de l'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Nous nous proposons donc de déterminer les inégalités du moyen mouvement d'Uranus, dues à l'action troublante de Neptune, et l'influence de ces inégalités sur la longitude d'Uranus, en tenant compte dans la fonction perturbatrice :

1) des termes de l'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons,

2) des termes du premier ordre par rapport à ces quantités, qui dépendent de l'argument $\xi - 2\xi'$.

Nous désignerons par des lettres non accentuées la masse, les coordonnées, les éléments etc. d'Uranus, et par des lettres accentuées la masse, les coordonnées etc. de Neptune.

Cela posé, la fonction perturbatrice des éléments d'Uranus, en ne tenant compte que de l'action troublante de Neptune, se réduit à

$$R = m' \left\{ \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \frac{1}{V(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right\}$$

en posant

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Supposons que le plan des x et des y soit le plan de l'écliptique, que l'axe des x soit la ligne menée du centre du soleil au point vernal à une époque donnée, que l'axe des y soit mené au solstice d'été et que les z positifs soient du même côté que le pôle boréal de l'écliptique. On aura alors, en désignant par Θ , l'anomalie vraie

$$x = r \cos(\Theta + \omega) \cos \alpha - r \sin(\Theta + \omega) \sin \alpha \cos \gamma$$

$$4) \quad y = r \cos(\Theta + \omega) \sin \alpha + r \sin(\Theta + \omega) \cos \alpha \cos \gamma$$

$$z = r \sin(\Theta + \omega) \sin \gamma$$

et des équations analogues pour x', y', z' , en y accentuant toutes les lettres.

Nous cherchons d'abord ceux des termes de la fonction perturbatrice développée suivant les puissances ascendantes des excentricités et des inclinaisons, qui sont de l'ordre zéro par rapport à ces quantités. Or, cette partie que nous désignons par R_1 sera évidemment ce que devient la fonction perturbatrice, lorsqu'on y fait

les excentricités et les inclinaisons égales à zéro. Or, dans ce cas r, r', ϖ, ϖ' deviennent respectivement a, a', ξ, ξ' et l'on a $x = a \cos (\xi + \omega + \alpha)$, $y = a \sin (\xi + \omega + \alpha)$, $z = 0$, donc

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} = \frac{a \cos \psi}{a'^2}$$

en mettant

$$\alpha) \quad \psi = \xi - \xi' + \omega + \alpha - \omega' - \alpha'$$

On aura de même

$$\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \psi}}$$

Or, cette fonction étant développable en série suivant les cosinus des arcs multiples de ψ , nous posons

$$\begin{aligned} \beta) \quad & \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \psi}} = \\ & = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \psi + A_2 \cos 2\psi + A_3 \cos 3\psi + \dots \end{aligned}$$

de sorte que la partie R_1 de la fonction perturbatrice sera :

$$m' \left\{ -\frac{1}{2} A_0 - \left(A_1 - \frac{a}{a'^2} \right) \cos \psi - A_2 \cos 2\psi - \dots \right\}$$

Or, les inégalités du moyen mouvement ne dépendent que de la dérivée partielle de R par rapport à ε , élément qui n'entre pas dans le terme non périodique $-\frac{1}{2} A_0$.

Nous supprimons donc ce terme, en mettant

$$\begin{aligned} 1) \quad R_1 = m' \left\{ - \left(A_1 - \frac{a}{a'^2} \right) \cos \psi - A_2 \cos 2\psi - \right. \\ \left. - A_3 \cos 3\psi - A_4 \cos 4\psi - \dots \right\} \end{aligned}$$

Nous cherchons en second lieu ceux des termes du premier ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons qui dépendent de l'argument $\xi - 2\xi'$.

Nous tirons des équations (4) en y faisant abstraction des secondes dimensions des inclinaisons :

$$\begin{aligned}x &= r \cos (\vartheta + \omega + \alpha) \\y &= r \sin (\vartheta + \omega + \alpha) \\z &= r y \sin (\vartheta + \omega)\end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} = \frac{r \cos (\vartheta + \omega + \alpha - \vartheta' - \omega' - \alpha')}{r'^2}$$

Développons le rayon vecteur et l'anomalie vraie suivant les puissances ascendantes des excentricités en mettant

$$\begin{aligned}r &= a + \delta a & \vartheta &= \zeta + \delta \zeta \\r' &= a' + \delta a' & \vartheta' &= \zeta' + \delta \zeta'\end{aligned}$$

et nous aurons, en nous bornant à la première puissance de ces quantités,

$$\frac{\delta a}{a} = -e \cos \zeta \qquad \delta \zeta = 2e \sin \zeta$$

$$\frac{\delta a'}{a'} = -e' \cos \zeta' \qquad \delta \zeta' = 2e' \sin \zeta'$$

Donc, en posant

$$\psi = \zeta - \zeta' + \omega + \alpha - \omega' - \alpha'$$

$$Q = \frac{a \cos \psi}{a'^2}$$

on aura avec la même approximation

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} = Q + \frac{dQ}{da} \delta a + \frac{dQ}{da'} \delta a' + \frac{dQ}{d\psi} \delta \psi$$

Or, nous ne cherchons dans le développement de $\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}$ que les termes qui dépendent de l'argument $\zeta - 2\zeta'$. La quantité Q elle-même ne contient pas cet argument. Les dérivées $\frac{dQ}{da}$, $\frac{dQ}{da'}$, $\frac{dQ}{d\psi}$ ne contiennent que l'argument $\zeta - \zeta'$. Il faut les multiplier par δa , $\delta a'$, $\delta \psi$ et dans le résultat remplacer le produit de deux cosinus ou de deux sinus par les cosinus de la somme et de la différence des arcs à l'aide des formules

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta).$$

D'un terme dépendant de l'argument $\xi - \xi'$ ne peut donc résulter un terme, argument $\xi - 2\xi'$, qu'en le multipliant par un terme, argument ξ' . Or, au lieu de dire: les termes d'une certaine quantité F qui ont quelque influence sur ceux de la fonction perturbatrice qui dépendent de l'argument $\xi - 2\xi'$, nous convenons d'écrire simplement: F = à ces termes, et c'est dans ce sens qu'il faut entendre le signe = dans les formules suivantes:

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} = \frac{dQ}{da'} \delta a' + \frac{dQ}{d\psi} \delta \psi$$

$$\frac{dQ}{da} = - \frac{2a \cos \psi}{a'^3} \quad \frac{\delta a'}{a'} = - e' \cos \xi'$$

$$\frac{dQ}{d\psi} = - \frac{a \sin \psi}{a'^2} \quad \delta \psi = - 2e' \sin \xi'$$

d'où enfin

$$a) \quad \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} = \frac{2ae'}{a'^2} \cos (\xi - 2\xi' + \omega + \alpha - \omega' - \alpha')$$

On a de plus, en négligeant les secondes dimensions, des inclinaisons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos (\Theta + \omega + \alpha - \Theta' - \omega' - \alpha')}} \end{aligned}$$

Posons

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \psi}}$$

Cela fait, on tirera de cette équation, en y négligeant les secondes puissances des excentricités,

$$\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = P + \frac{dP}{da} \delta a + \frac{dP}{da'} \delta a' + \frac{dP}{d\psi} \delta \psi$$

La fonction P étant développable suivant les cosinus des arcs multiples de ψ , nous mettons, comme ci-dessus,

$$P = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \psi + A_2 \cos 2\psi + A_3 \cos 3\psi + \dots$$

Or, les quantités δa , $\delta a'$, $\delta \psi$ ne contiennent que les arguments ξ et ξ' , tandis que P et les dérivées partielles $\frac{dP}{da}$, $\frac{dP}{da'}$, $\frac{dP}{d\psi}$ ne contiennent que des termes qui dépendent de l'argument $i\xi - i\xi'$, i étant zéro ou un nombre entier quelconque. Or, pour obtenir un terme, argument $\xi - 2\xi'$, il faut multiplier

un terme, argument ξ , avec un terme, argument $2\xi - 2\xi'$ et un terme, argument ξ' , avec un terme, argument $\xi - \xi'$.

Cela posé, nous pouvons écrire en entendant le signe = dans le sens indiqué ci-dessus,

$$\frac{\delta a}{a} = -e \cos \xi$$

$$\frac{\delta a'}{a'} = -e' \cos \xi'$$

$$\frac{dP}{da} = \frac{dA_2}{da} \cos 2\psi$$

$$\frac{dP}{da'} = \frac{dA_1}{da'} \cos \psi$$

$$\delta \psi = 2e \sin \xi - 2e' \sin \xi'$$

$$\frac{dP}{d\psi} = -2A_2 \sin 2\psi - A_1 \sin \psi$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} b) \quad & \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = \\ & = \left\{ A_1 - \frac{1}{2} \frac{dA_1}{da'} a' \right\} e' \cos (\xi - 2\xi' + \omega + \alpha - \omega' - \alpha') \\ & - \left\{ 2A_2 + \frac{1}{2} \frac{dA_2}{da} a \right\} e \cos (\xi - 2\xi' + 2\omega + 2\alpha - 2\omega' - 2\alpha'). \end{aligned}$$

En retranchant ces termes de l'expression (a), nous trouvons la partie de la fonction perturbatrice qui dépend de l'argument $\xi - 2\xi'$ et qui est du premier ordre par rapport aux inclinaisons et aux excentricités. Nous la désignons par R_2 , de sorte qu'on aura

$$R_2 = m' \left(\frac{2a}{a'^2} - A_1 + \frac{1}{2} \frac{dA_1}{da'} a' \right) e' \cos (\zeta - 2\zeta' + \omega + \alpha - \omega' - \alpha') + \\ + m' \left(2A_2 + \frac{1}{2} \frac{dA_2}{da} a \right) e \cos (\zeta - 2\zeta' + 2\omega + 2\alpha - 2\omega' - 2\alpha')$$

Pour donner à cette valeur de R_2 une forme plus propre au calcul numérique, nous allons établir quelques relations entre les quantités désignées par A et leurs dérivées partielles par rapport à a et a' .

Nous avons l'équation identique

$$\alpha) \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \psi}} = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \psi + A_2 \cos 2\psi + \dots$$

Il est évident que les A sont des fonctions homogènes du degré -1 par rapport aux quantités a et a' . Nous en concluons

$$\beta) \quad \frac{dA_i}{da} a + \frac{dA_i}{da'} a' = -A_i$$

L'équation (α) devant être identique, nous en prenons la dérivée partielle par rapport à a , ce qui donne

$$-\frac{a - a' \cos \psi}{\sqrt{(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \psi)^3}} = \frac{1}{2} \frac{dA_0}{da} + \frac{dA_1}{da} \cos \psi + \frac{dA_2}{da} \cos 2\psi + \dots$$

Or, la fonction $\frac{1}{\sqrt{(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \psi)^3}}$ sera aussi développable en série suivant les cosinus des arcs multiples de ψ , et nous posons

$$\gamma) \quad \frac{1}{\sqrt{(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \psi)^3}} = \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos \psi + B_2 \cos 2\psi + \dots$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $-(a - a' \cos \psi)$ et égalant le résultat à l'équation précédente, nous trouvons les relations

$$\frac{dA_0}{da} = \frac{1}{2} B_1 a' - B_0 a + \frac{1}{2} B_1 a'$$

$$\delta) \quad \frac{dA_1}{da} = \frac{1}{2} B_0 a' - B_1 a + \frac{1}{2} B_2 a'$$

$$\frac{dA_2}{da} = \frac{1}{2} B_1 a' - B_2 a + \frac{1}{2} B_3 a' \quad \text{etc.}$$

Différentions l'équation (α) par rapport à ψ

$$\frac{a a' \sin \psi}{\sqrt{(a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos \psi)^3}} = A_1 \sin \psi + 2A_2 \sin 2\psi + \dots$$

En multipliant l'équation (γ) par $a a' \sin \psi$, nous trouvons en vertu de la formule précédente

$$\begin{aligned} \epsilon) \quad A_1 &= \frac{1}{2} B_0 a a' - \frac{1}{2} B_2 a a' \\ 2A_2 &= \frac{1}{2} B_1 a a' - \frac{1}{2} B_3 a a' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Nous différencions l'équation (γ) par rapport à ψ , ce qui donne

$$\frac{3 a a' \sin \psi}{\sqrt{(a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos \psi)^5}} = B_1 \sin \psi + 2B_2 \sin 2\psi + \dots$$

d'où

$$\begin{aligned} 3 a a' \sin \psi \left(\frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos \psi + B_2 \cos 2\psi + \dots \right) = \\ = (a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos \psi) (B_1 \sin \psi + 2B_2 \sin 2\psi + \dots) \end{aligned}$$

En effectuant les multiplications indiquées, nous obtenons les équations

$$\begin{aligned} \xi) \quad \frac{3}{2} a a' B_0 &= (a^2 + a'^2) B_1 - \frac{1}{2} a a' B_2 \\ \frac{5}{2} a a' B_1 &= 2(a^2 + a'^2) B_2 - \frac{3}{2} a a' B_3 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

En traitant pareillement l'équation (α), nous en tirons

$$\begin{aligned} \eta) \quad \frac{5}{2} a a' A_3 &= 2(a^2 + a'^2) A_2 - \frac{3}{2} a a' A_1 \\ \frac{7}{2} a a' A_4 &= 3(a^2 + a'^2) A_3 - \frac{5}{2} a a' A_2 \\ \frac{9}{2} a a' A_5 &= 4(a^2 + a'^2) A_4 - \frac{7}{2} a a' A_3 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Nous remplaçons maintenant dans la valeur de R_2 la quantité $\frac{d A_1}{d a'}$ a' par sa valeur tirée de l'équation (β),

puis, nous mettons à la place de $\frac{dA_1}{da}$, $\frac{dA_2}{da}$, A_1 , A_2 leurs valeurs données par les équations (d) et (e), et nous éliminons enfin B_0 et B_3 à l'aide des équations (ξ). Cela fait, la fonction R_2 aura la forme suivante:

$$R_2 = m' \left\{ \frac{2a}{a'^2} - \left(\frac{a^2}{6} + \frac{2a'^2}{3} \right) B_1 + \frac{5aa'}{6} B_2 \right\} e' \cos(\xi - 2\xi' + \omega + \alpha - \omega' - \alpha') + \\ \text{II) } + m' \left\{ \frac{7aa'}{6} B_1 - \left(\frac{5a^2}{6} + \frac{a'^2}{3} \right) B_2 \right\} e \cos(\xi - 2\xi' + 2\omega + 2\alpha - 2\omega' - 2\alpha').$$

Ces termes réunies aux termes I., formeront la partie la plus importante de la fonction perturbatrice, et nous en négligeons tous les autres en mettant

$$R = R_1 + R_2$$

Pour obtenir les inégalités du moyen mouvement, il faut prendre la dérivée partielle de R par rapport à ε , élément qui n'entre dans la fonction perturbatrice que par l'anomalie moyenne $\xi = nt + \varepsilon - \omega$. Nous pouvons donc, avant de prendre cette dérivée, évaluer numériquement les coefficients des différents cosinus dont se composent R_1 et R_2 .

Nous procédons au calcul des quantités désignées par A et B .

En mettant $\frac{a}{a'} = \alpha$, α sera une quantité plus petite que l'unité, et l'équation (α) prendra la forme

$$\frac{1}{a'} (1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \psi + A_2 \cos 2\psi + \dots$$

Or, la fonction $(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ peut être mise sous la forme

$$\left(1 - \alpha e^{\psi \sqrt{-1}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \alpha e^{-\psi \sqrt{-1}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

en désignant par e la base des logarithmes naturels. On développera chaque facteur suivant les puissances ascendantes de $\alpha e^{\pm \psi \sqrt{-1}}$, et effectuera ensuite la multiplication

indiquée. En remettant enfin à la place de $e^{\kappa\psi\sqrt{-1}} + e^{-\kappa\psi\sqrt{-1}}$ la valeur $2 \cos \kappa\psi$, on formera directement le développement de $(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les cosinus des arcs multiples de ψ , d'où l'on tirera

$$A_1 = \frac{2a}{a'^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1.3}{2.4} \alpha^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} \alpha^6 \dots \right)$$

$$A_2 = \frac{2a^2}{a'^3} \left(\frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{1.3}{2.4} \alpha^4 + \dots \right).$$

Pour effectuer le plus commodement la sommation de ces séries, on commencera par former un tableau des logarithmes des quantités $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{25}{26}$, puis en mettant

$$A_1 = \frac{2a}{a'^2} [a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \dots]$$

on calculera les logarithmes de $a_0, a_2, \dots$ à l'aide de la relation

$$\text{Lg } a_{2x} = \text{Lg } a_{2x-2} + \text{Lg } \frac{2x+1}{2x+2} + \text{Lg } \frac{2x-1}{2x} + \text{Lg } (\alpha^2)$$

Les valeurs numériques de a et de a' sont, en prenant pour unité le demi-grand-axe de l'orbite terrestre

Demi-grand-axe d'Uranus $a = 19,1824$

Demi-grand-axe de Neptune $a' = 30,04$

d'où $\text{Log } (\alpha^2) = \text{Lg } \left(\frac{a^2}{a'^2} \right) = \bar{1},6104060$, en désignant par un trait — au-dessus d'un nombre les caractéristiques négatives, et l'on trouvera :

$$a_0 = 0,5$$

$$a_2 = 0,0764553$$

$$a_4 = 0,0194847$$

$$a_6 = 0,0057933$$

$$a_8 = 0,0018603$$

$$a_{10} = 0,0006258$$

$$a_{12} = 0,0002172$$

$$a_{14} = 0,0000771$$

$$a_{16} = 0,0000278$$

$$a_{18} = 0,0000102$$

$$a_{20} = 0,0000038$$

$$a_{22} = 0,0000014$$

Pour tenir compte des autres termes de cette série, nous admettons l'hypothèse, qu'ils forment une progression géométrique, dont la raison est $\frac{14}{38}$, en sorte que nous aurons en prenant pour unité 10^{-7}

$$a_{24} + a_{26} + \dots = 14 \cdot \frac{7}{19} + 14 \cdot \frac{7^2}{19^2} + \dots = 8$$

En ajoutant donc 0,0000008 à la somme

$$a_0 + a_2 + \dots + a_{22}, \quad \text{nous trouvons}$$

$$a_0 + a_2 + \dots = 0,6045577 \quad \text{d'où enfin}$$

$$\text{Lg } A_1 = \bar{2},4099708$$

On trouvera pareillement

$$\text{Lg } A_2 = \bar{2},0998613$$

En substituant ces valeurs dans les équations (η), on en tire successivement

$$\text{Lg } A_3 = \bar{3},8308959$$

$$\text{Lg } A_4 = \bar{3},5812065$$

$$\text{Lg } A_5 = \bar{3},3427658$$

etc.

Quant aux quantités désignées par B, les équations (ε) et (ξ) donnent

$$\frac{1}{3} B_1 = \frac{(a^2 + a'^2) A_1 - 2 a a' A_2}{(a'^2 - a^2)^2}$$

$$\frac{1}{3} B_2 = \frac{2 a a' A_1 - (a^2 + a'^2) A_2}{(a'^2 - a^2)^2}$$

d'où

$$\text{Lg } B_1 = \bar{4},2801336$$

$$\text{Lg } B_2 = \bar{4},1559331$$

Pour nous assurer qu'il n'y a pas de faute commise

dans le calcul de ces nombres, nous allons encore évaluer B_1 et B_2 d'une manière directe.

On tire de l'équation (7)

$$B_1 = \frac{2a}{a^4} \left(\frac{3}{2} + \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{3.5}{2.4} \alpha^4 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \frac{3.5.7}{2.4.6} \alpha^6 + \dots \right)$$

$$B_2 = \frac{2a^2}{a^{15}} \left(\frac{3.5}{2.4} + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \frac{3.5}{2.4} \alpha^4 + \dots \right)$$

Ces séries étant moins convergentes que les séries analogues pour A_1 et A_2 , on aura besoin de calculer 19 termes de chacune, on y ajoutera une correction pour les termes négligés comme nous l'avons fait dans le calcul des A , et nous avons trouvé de cette manière

$$\text{Lg } B_1 = \bar{4},2801336$$

$$\text{Lg } B_2 = \bar{4},1559329$$

Les excentricités des orbites d'Uranus et de Neptune sont

$$\text{Excentricité d'Uranus } e = 0,0466$$

$$\text{Excentricité de Neptune } e' = 0,0087195$$

Ces valeurs substituées dans l'expression de R_2 donnent

$$\frac{R_2}{m'} = M \cos (\xi - 2\xi' + 2x) - N \cos (\xi - 2\xi' + x)$$

où

$$\text{Lg } M = \bar{3},2828248$$

$$\text{Lg } N = \bar{4},1188993$$

$$x = \omega + \alpha - \omega' - \alpha'$$

Or, $\omega + \alpha$ et $\omega' + \alpha'$ désignent les longitudes des périhélie d'Uranus et de Neptune, dont les valeurs sont

$$\omega + \alpha = 167^\circ 30' 24''$$

$$\omega' + \alpha' = 47^\circ 14' 37''$$

Il en résulte

$$\frac{R_2}{m'} = N \sin (\xi - 2\xi' + \varphi) - M \cos (\xi - 2\xi' + \psi)$$

où

$$\varphi = 30^\circ 15' 47''$$

$$\psi = 60^\circ 31' 34''$$

Nous mettons enfin R_2 sous la forme

$$R_2 = m' L \sin (\xi - 2\xi' - h)$$

en posant

$$L \cos h = M \sin \psi + N \cos \varphi$$

$$L \sin h = M \cos \psi - N \sin \varphi$$

d'où l'on tire

$$h = 26^\circ 11' 52''$$

$$\text{Lg. } L = 3,2982876$$

Nous mettons encore dans l'expression de R_1 A_1 à la place de $A_1 - \frac{a}{a'^2}$ en sorte que maintenant $\text{Lg } A_1 = 3,6478893$. Cela posé, la fonction perturbatrice $R = R_1 + R_2$ prend la forme

$$R = m'[-A_1 \cos \psi - A_2 \cos 2\psi - A_3 \cos 3\psi - \dots + L \sin (\xi - 2\xi' - h)]$$

Or, en désignant par M la masse du soleil et par m celle d'Uranus, on aura

$$n^2 a^3 = M + m$$

par suite $0 = 2na^3 \frac{dn}{dt} + 3n^2 a^2 \frac{da}{dt}$. Nous en tirons

en vertu de l'équation $\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{dR}{d\varepsilon}$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{3}{a^2} \frac{dR}{d\varepsilon}$$

L'élément ε n'entre dans R que par l'anomalie moyenne $\xi = nt + \varepsilon - \omega$. Il en résulte, vu la valeur de ψ

$$\frac{dn}{dt} = \frac{3m'}{a^2} [A_1 \sin \psi + 2A_2 \sin 2\psi + 3A_3 \sin 3\psi + \dots + L \cos (\xi - 2\xi' - h)]$$

Si dans le second membre de cette équation nous traitons les éléments comme des constantes, le temps n'y entre que par les anomalies moyennes

$$\xi = nt + \varepsilon - \omega \quad \xi' = n't + \varepsilon' - \omega'$$

et nous trouvons, en intégrant, n égal à une constante, plus une quantité variable qui sera l'inégalité cherchée

du moyen mouvement d'Uranus, et nous aurons, en la désignant par δn

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad \delta n = & \frac{3m'}{a^2(n - n')} [-A_1 \cos \psi - A_2 \cos 2\psi - A_3 \cos 3\psi - \dots] + \\ & + \frac{3m' L}{a^2(n - 2n')} \sin (\zeta - 2\zeta' - h) \end{aligned}$$

L'argument ψ qui entre dans cette expression, est $\psi = \zeta - \zeta' + \omega + \alpha - \omega' - \alpha'$ ou, ce qui revient au même

$$\psi = (n - n')t + \varepsilon + \alpha - (\varepsilon' + \alpha')$$

Or $\varepsilon + \alpha$ et $\varepsilon' + \alpha'$ sont les longitudes moyennes de l'époque d'Uranus et de Neptune, et nous avons, l'époque étant le 1^{er} janvier 1800

$$\varepsilon + \alpha = 173^\circ 30' 37''$$

$$\varepsilon' + \alpha' = 335^\circ 8' 58''$$

Les moyens mouvements diurnes d'Uranus et de Neptune sont de plus

$$n = 42'', 233$$

$$n' = 21'', 554$$

Or, nous prenons pour unité de temps l'année julienne = 365,25 jours, de sorte que $n - n' = 365,25 \times 20'', 679$.

Il en résulte $\psi = 7553'', 0 t - 161^\circ 38' 21''$ et

$$\cos x\psi = (-1)^x \cos x (7553'', 0t + 18^\circ 21' 39'')$$

Nous avons enfin

$$\zeta - 2\zeta' = (n - 2n')t + (\varepsilon - \omega) - 2(\varepsilon' - \omega')$$

Or, $\varepsilon - \omega$ est égal à la longitude moyenne de l'époque, moins la longitude du périhélie et l'on trouvera à l'aide des valeurs données de ces éléments

$$\sin (\zeta - 2\zeta' - h) = \sin [349'', 494t + 56^\circ 0' 21'']$$

t étant toujours exprimé en années juliennes, et compté à partir du 1. Janvier 1800.

Quant aux amplitudes des inégalités dont se compose δn , nous mettons d'abord $\frac{m'}{M}$ M à la place de m' , en dé-

signant par M la masse du soleil. Or, soient m_1 , n_1 , a_1 la masse, le moyen mouvement et le demi-grand-axe d'une planète quelconque, on aura $M + m_1 = n_1^2 a_1^3$, donc, en prenant pour cette planète la Terre et négligeant m_1 à côté de M , il vient $M = n_1^2$ en sorte que

$$m' = \frac{m'}{M} n_1^2$$

La formule (A) suppose que nous y exprimons n_1 , n et n' en parties du rayon, et elle donnera alors δn exprimé en parties du rayon. Donc, pour avoir δn exprimé en secondes, il faut, après avoir n_1 , n et n' exprimés en partie du rayon, multiplier le second membre de l'équation (A) par $\frac{648000}{\pi}$. Or, il est évident que le résultat sera le même si, au lieu d'exprimer n_1 , n , n' en parties du rayon, nous exprimons toutes ces quantités en secondes.

Cela posé, nous aurons pour le calcul de ces amplitudes les données suivantes:

$$\frac{m'}{M} = \frac{1}{14446}$$

$$n_1 = 365,25 \times 3548'', 193$$

$$n - n' = 365,25 \times 20'', 679$$

$$n - 2n' = - 365,25 \times 0'', 875$$

et nous trouvons enfin

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad \delta n = & - 5'', 989 \sin (319'', 594 t + 56^\circ \cdot 0' \cdot 21'') + \\ & + 0'', 558 \cos \psi - 1'', 580 \cos 2\psi + 0'', 850 \cos 3\psi - \\ & - 0'', 478 \cos 4\psi + 0'', 276 \cos 5\psi - \dots \end{aligned}$$

en mettant

$$\psi = 7553'', 00 t + 18^\circ \cdot 21' \cdot 39''$$

le temps t étant exprimé en années juliennes et compté à partir du 1. Janvier 1800.

Cette formule donne les inégalités les plus sensibles

du moyen mouvement annuel d'Uranus dues à l'action troublante de Neptune, et nous voyons que celle qui dépend de l'argument $319''.594 t$ en est beaucoup la plus considérable. La période de cette inégalité est 4055,15 années juliennes. Quand elle aura atteint sa valeur maximum, Uranus décrira, en vertu d'elle, dans un an $6''$ de plus ou de moins qu'une autre planète qui serait à la même distance du soleil et qui serait assujettie aux perturbations de toutes les autres planètes, excepté de Neptune.

La longitude moyenne d'Uranus est donnée par la formule

$$l = \int n dt + (\varepsilon + \alpha)$$

Nous aurons donc les inégalités de la longitude moyenne d'Uranus dues à l'action troublante de Neptune et qui dépendent des inégalités du moyen mouvement, en prenant l'intégrale du second membre de la formule (B), après l'avoir multiplié par dt . Mais nous remarquons que l'action de Neptune donne encore naissance à d'autres inégalités de la longitude moyenne, qui proviennent de la variation de $\varepsilon + \alpha$, quantité qui dans le mouvement non troublé représente la longitude moyenne de l'époque. Désignons par δl l'inégalité de la longitude moyenne qui provient de l'inégalité $- 5''.989 \sin (319''.594 t + 56^\circ 0' 21'')$ du moyen mouvement, nous aurons

$$\delta l = \frac{5,989}{319,594} \cos (319'', 594 t + 56^\circ \cdot 0' \cdot 21'')$$

Or, cette formule donne δl exprimé en parties du rayon, il faut donc, pour l'exprimer en secondes, multiplier le second nombre par $\frac{648000}{\pi}$ et nous trouvons enfin

$$\delta l = 3804''.3 \cos (319'', 594 t + 56^\circ \cdot 0' \cdot 21'')$$

t étant toujours exprimé en années juliennes et compté à partir du 1. Janvier 1800.

La valeur maximum de cette inégalité est $1^{\circ}.3'.24''3$. Les autres inégalités du moyen mouvement que nous avons calculées donnent dans la longitude moyenne

$$15'', 2 \sin \psi - 21'', 6 \sin 2\psi + 7'', 7 \sin 3\psi + \dots$$

mais nous supprimons celles-là, parce que nous ne tenons compte non plus des inégalités de $\varepsilon + \alpha$. Il résulte donc de ce que les moyens mouvements d'Uranus et de Neptune sont entre eux à-peu-près comme 2 à 1 une inégalité fort considérable de la longitude moyenne d'Uranus dont la période est 4055 années juliennes. Or, les inégalités de la longitude vraie étant sensiblement les mêmes que celles de la longitude moyenne, nous en concluons que par l'action de Neptune, Uranus peut s'écarter en longitude jusqu'à $1^{\circ}.3'.24''$ de la position d'une planète qui serait à la même distance du soleil et qui subirait les perturbations de tous les corps du système solaire, excepté de Neptune.

En mettant en tableau les époques, où l'inégalité indiquée de la longitude moyenne d'Uranus atteint ses valeurs maximum et minimum, nous trouvons

$\delta l = 0$	pour $t = -1644,7$	ou en 155.	Mai	après J.-Chr.
$\delta l = + 1^{\circ}.3'.24''$	» $t = -630,9$	» 1169.	Févr.	» »
$\delta l = 0$	» $t = +382,9$	» 2182.	Nov.	» »
$\delta l = - 1^{\circ}.3'.24''$	» $t = +1396,7$	» 3196.	Sept.	» »
$\delta l = 0$	» $t = +2410,5$	» 4210.	Juillet	» »

De la relation qui existe entre les moyens mouvements d'Uranus et de Neptune résultera une inégalité analogue de la longitude de Neptune. Or, on trouvera dans la Mécanique céleste (livre II § 64) la démonstration générale du théorème que quand on a des inégalités du genre considéré, que l'action d'une masse m' produit dans la longitude de m , les inégalités correspondantes que l'action

de m produit dans la longitude de m' , seront aux premières dans le rapport constant

$$-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$$

Les masses d'Uranus et de Neptune sont, en prenant celle du soleil, pour unité

$$m = \frac{1}{24000} \quad m' = \frac{1}{14446}$$

On aura donc en désignant par $\delta l'$ l'inégalité correspondante de la longitude moyenne de Neptune

$$\delta l' = -1829'', 8 \cos (319'', 594 t + 56^\circ \cdot 0' \cdot 21'')$$

La valeur maximum de $\delta l'$ est $30' \cdot 29'', 8$. et l'on remarquera, que le moyen mouvement de Neptune va, en s'accéléralant, en même temps que le moyen mouvement d'Uranus se ralentit, et réciproquement.

